HILBERTRÄUME
DEFINITION UND ELEMENTARE EIGENSCHAFTEN

1. Definition

Definition. *Ein* **Skalarprodukt** *oder* **inneres Produkt** *auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum H ist eine Abbildung $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$, für die gilt:*

(i) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, f, g \in H)$
(ii) $(f,g) = \overline{(g,f)} \quad (f, g \in H)$
(iii) $(f,f) \geq 0 \quad (f \in H)$ *und* $(f,f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Ein **Prähilbertraum** *ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist.*

Satz. *Sei H ein Prähilbertraum. Dann ist die Abbildung*

$$\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}\ ,\ \|f\| = \sqrt{(f,f)}$$

eine Norm auf H und es gilt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|(f,g)| \leq \|f\|\|g\| \quad (f, g \in H).$$

Definition. *Ein* **Hilbertraum** *ist ein Prähilbertraum, der bezüglich der obigen Norm vollständig ist.*

Im folgenden seien H und K immer Hilberträume.

2. Orthogonalität

Definition.

(a) *Zwei Elemente $f, g \in H$ heißen* **orthogonal**, *falls $(f,g) = 0$ gilt. Man schreibt hierfür $f \perp g$.*
(b) *Zwei Teilmengen $S, T \subset H$ heißen* **orthogonal**, *falls $f \perp g$ für alle $f \in S$, $g \in T$ gilt. Man schreibt hierfür $S \perp T$.*
(c) *Für eine Teilmenge $T \subset H$ definiert man den* **Orthogonalraum** *$T^\perp$ durch:*

$$T^\perp = \{f \in H\ ;\ f \perp g \text{ für alle } g \in T\}$$

Wie man leicht sieht, ist $T^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H.

Satz. *Sei M ein abgeschlossener Untervektorraum von H.*

(a) *Zu jedem $f \in H$ gibt es genau ein $f_0 \in M$ mit*

$$\|f - f_0\| = dist(f, M) = \inf\{\|f - g\|\ ;\ g \in M\}.$$

(b) *Für $f \in H$ und $h \in M$ gilt*

$$\|f - h\| = dist(f, M) \Leftrightarrow f - h \in M^\perp.$$

Definition. *Nach dem letzten Satz existiert zu jedem abgeschlossenen Untervektorraum M von H und jedem $f \in H$ genau ein Element $f_0 \in M$ mit $f - f_0 \in M^\perp$. Hierdurch wird eine Abbildung*

$$P : H \to H \ , \ f \mapsto f_0$$

definiert. Man nennt P die **Orthogonalprojektion** *von H auf M.*

Satz. *Sei M ein abgeschlossener Untervektorraum von H und sei P die Orthogonalprojektion von H auf M. Dann gilt:*

(a) *P ist eine lineare Abbildung mit $\|P\| \leq 1$.*
(b) *Es gilt $P^2 = P$ (das heißt, P ist eine Projektion).*
(c) *Es gilt $kerP = M^\perp$ und $ranP = M$.*
(d) *$1_H - P$ ist die Orthogonalprojektion auf $M^\perp$.*

Definition. *Für eine Teilmenge $T \subset H$ definiert man die* **abgeschlossene lineare Hülle** *$\bigvee T$ als den Durchschnitt über alle abgeschlossenen Untervektorräume von H, die T enthalten.*

Satz. *Für jede Teilmenge T von H und jeden Untervektorraum M von H gilt:*

(a) $\bigvee T = T^{\perp\perp} = (T^\perp)^\perp$ *und* $\bigvee T = \overline{spanT}$
(b) $\overline{M} = M^{\perp\perp}$ *und* $(\overline{M})^\perp = M^\perp$
(c) *M ist dicht in H (das heißt $\overline{M} = H$) genau dann, wenn $M^\perp = \{0\}$.*

3. Linearformen

Satz. *Sei $A : H \to K$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist stetig.*
(ii) *A ist gleichmäßig stetig.*
(iii) *Es gibt ein $C > 0$ mit $\|Af\| \leq C\|f\|$ für alle $f \in H$.*

Wegen (iii) werden lineare Abbildungen auch als **beschränkt** *bezeichnet.*

Definition.

(a) *Sei $A : H \to K$ eine stetige lineare Abbildung. Dann definiert man die* **Operatornorm** *von A als*

$$\|A\| = \inf\{C > 0 \ ; \ \|Af\| \leq C\|f\| \text{ für alle } f \in H\}.$$

(b) *Die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von H nach K wird mit $L(H,K)$ bezeichnet. Abkürzend schreibt man auch $L(H)$ statt $L(H,H)$. Elemente von $L(H,K)$ bezeichnen wir auch als Operatoren.*
(c) *Ein Operator $A \in L(H,K)$ heißt invertierbar, wenn er bijektiv ist und die inverse (automatisch lineare) Abbildung A^{-1} stetig ist, das heißt $A^{-1} \in L(K,H)$ gilt.*
(d) *Die Elemente des* **Dualraumes** *$L(H,\mathbb{C})$ von H werden als* **stetige lineare Funktionale** *bezeichnet.*

Satz.

(a) *Für jeden Operator $A \in L(H,K)$ gilt*
$$\|A\| = \sup\{\|Af\| \; ; \; \|f\| \leq 1\} = \sup\{\|Af\| \; ; \; \|f\| = 1\}$$
und
$$\|Af\| \leq \|A\|\|f\| \text{ für alle } f \in H.$$
(b) *Die Operatornorm $\|\cdot\| : L(H,K) \to \mathbb{R}$ ist eine Norm auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $L(H,K)$ und $L(H,K)$ versehen mit dieser Norm ist ein Banachraum.*

Satz (Riesz-Fréchet)**.** *Sei $\phi : H \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional. Dann gibt es genau einen Vektor $f_0 \in H$ mit*
$$\phi(f) = (f, f_0) \text{ für alle } f \in H,$$
und es gilt $\|\phi\| = \|f_0\|$.

4. Orthonormalsysteme

Definition. *Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Elementen aus H heißt* **summierbar***, wenn es ein $f \in H$ gibt, so daß zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge F_0 von I mit der folgenden Eigenschaft gibt:*
$$\text{Für jede endliche Teilmenge } F \text{ von } I \text{ mit } F_0 \subset F \text{ gilt } \|f - \sum_{i\in F} f_i\| < \epsilon.$$
Existiert ein solches f, so ist es eindeutig bestimmt und wird die **Summe** *der f_i genannt und mit*
$$f = \sum_{i\in I} f_i$$
bezeichnet.

Definition. *Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Familie $(e_i)_{i\in I}$ von Elementen aus H heißt* **Orthonormalsystem***, wenn*
$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{falls } i = j \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$
gilt.

Satz (Besselsche Ungleichung)**.** *Sei $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in H. Dann ist für jeden Vektor $f \in H$ die Familie $(|(f,e_i)|^2)_{i\in I}$ summierbar in $\mathbb{C}$, und es gilt*
$$\sum_{i\in I} |(f,e_i)|^2 \leq \|f\|^2.$$
Ferner ist die Familie $((f,e_i)e_i)_{i\in I}$ summierbar in H.

Satz. *Für jedes Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ sind äquivalent:*

(i) $\bigvee\{e_i \; ; \; i \in I\} = H$.
(ii) *Für jedes $f \in H$ ist die Familie $((f,e_i)e_i)_{i\in I}$ summierbar in H und es gilt*
$$f = \sum_{i\in I} (f,e_i)e_i.$$
(iii) *Für jedes $f \in H$ gilt die* **Parsevalsche Gleichung**
$$\sum_{i\in I} |(f,e_i)|^2 = \|f\|^2.$$
(iv) *Es ist $\{e_i \; ; \; i \in I\}^\perp = \{0\}$.*

Ist $I = \mathbb{N}$, so sind (i) bis (iv) äquivalent zu *(v) Für jedes $f \in H$ konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}(f, e_i)e_i$ und es gilt*

$$f = \sum_{i=0}^{\infty}(f, e_i)e_i.$$

Definition. *Ein Orthonormalsystem heißt* **vollständig** *oder* **Orthonormalbasis**, *wenn es eine der äquivalenten Bedingungen aus dem letzen Satz erfüllt.*

Satz. *Jedes Orthonormalsystem in einem Hilbertraum läßt sich zu einer Orthonormalbasis erweitern. Insbesondere besitzt jeder (nichttriviale) Hilbertraum eine Orthonormalbasis.*

5. Operatoren auf Hilberträumen

Definition. *Seien $A \in L(H, K)$ und $g \in K$. Dann ist die Abbildung*

$$H \to \mathbb{C}\ ,\ \ f \mapsto (Af, g)$$

ein stetiges lineares Funktional. Nach dem Satz von Riesz-Fréchet gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $A^*g \in H$ mit

$$(Af, g) = (f, A^*g) \quad (f \in H).$$

Die so definierte Abbildung $A^* : K \to H$ heißt die **adjungierte Abbildung** *von A.*

Satz.

(a) Für jeden Operator $A \in L(H, K)$ ist die adjungierte Abbildung A^* stetig linear, und es gilt
  - *(i)* $\|A\| = \|A^*\|$
  - *(ii)* $A^{**} = (A^*)^* = A$.

  Weiterhin ist die Abbildung

$$L(H, K) \to L(K, H)\ ,\ \ A \mapsto A^*$$

  antilinear, *das heißt, für alle $A, B \in L(H, K)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt*

$$(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha}A^* + B^*.$$

(b) Für zwei Operatoren $A, B \in L(H)$ gilt: $(AB)^* = B^*A^*$.

(c) Ist $A \in L(H)$ invertierbar, so ist auch A^* invertierbar, und es gilt

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Definition. *Ein Operator $A \in L(H)$ heißt*

- *(i)* **Hermitesch** *oder* **selbstadjungiert**, *falls $A^* = A$ gilt.*
- *(ii)* **normal**, *falls $A^*A = AA^*$ gilt.*
- *(iii)* **unitär**, *falls $AA^* = A^*A = 1_H$ gilt.*

Satz.

(a) Für einen Operator $A \in L(H, K)$ sind äquivalent:
  - *(i) A ist* **isometrisch**, *das heißt $\|Af\| = \|f\|$ für alle $f \in H$.*
  - *(ii) $(Af, Ag) = (f, g)$ für alle $f, g \in H$.*
  - *(iii) $A^*A = 1_H$.*

(b) Für einen Operator $A \in L(H)$ sind äquivalent:
  - *(i) A ist unitär.*
  - *(ii) A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.*
  - *(iii) A ist surjektiv und isometrisch.*
  - *(iv) A ist normal und isometrisch.*