L^p-RÄUME

Es sei $\mathcal{X} = (X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir bezeichnen für $1 \leq p < \infty$ mit $\mathcal{L}^p(\mathcal{X})$ die Menge aller meßbaren p-integrablen Funktionen von X nach $\mathbb{C}$, d.h.

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mathcal{X}) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ meßbar; } \int_X |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Ferner sei für $f : X \to \mathbb{R}$ das wesentliche Supremum von f definiert als

$$\text{ess sup}(f) = \inf\{M \in (-\infty, \infty) \ ; \ f \leq M \ \mu\text{-fast überall}\}$$

und

$$\mathcal{L}^\infty(\mathcal{X}) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ meßbar ; ess sup}(|f|) < \infty\}.$$

Man definiert für $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X})$

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty)$$

bzw. für $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{X})$

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup}(|f|)$$

und beweist folgende Aussagen:

(a) Es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X})$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mathcal{X})$ ist $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mathcal{X})$, und es gilt

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \ \|g\|_q \qquad (\textbf{Höldersche Ungleichung}).$$

(b) Für $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X})$ ist auch $f + g \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X})$, und es gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad (\textbf{Minkowskische Ungleichung}).$$

Die so definierten $\mathcal{L}^p(\mathcal{X})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ sind Vektorräume und die Abbildungen $\|\cdot\|_p$ sind Halbnormen auf $\mathcal{L}^p(\mathcal{X})$.

Es sei nun $1 \leq p \leq \infty$ fest. Sei

$$N_p = \{f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X}) \ ; \ \|f\|_p = 0\}.$$

Mit der Minkowskischen Ungleichung folgt sofort, daß N_p ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p(\mathcal{X})$ ist. Der Quotientenraum

$$L^p(\mathcal{X}) = \mathcal{L}^p(\mathcal{X})/N_p$$

versehen mit

$$\|f + N_p\|_p := \|f\|_p$$

ist ein normierter Raum, der sogar vollständig ist. Im Spezialfall $p = 2$ ist $L^2(\mathcal{X})$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f + N_p, g + N_p \rangle := \int_X f\overline{g} \, d\mu,$$

ein Hilbertraum.

Die Elemente von $L^p(\mathcal{X})$ sind also Mengen von Funktionen, die sich nur auf einer μ-Nullmenge unterscheiden und daher alle die gleiche p-Norm besitzen. Man sagt aber häufig, daß eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ in $L^p(\mathcal{X})$ liegt, und meint damit, daß $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X})$ gilt.