I. Lineare Gleichungssysteme

Beginn 8^{30}

Ziel dieses Kapitels ist die systematische Untersuchung sogenannter linearer Gleichungssystem. Dazu werden wir Matrizen einführen und mit dem sog. Gauß-Algorithmus ~~die~~ ein Lösungsverfahren für solche Gleichungssysteme angeben.

VW 2 4. 11. 2016

1.1 Beispiel / Motivation

Wie viel Kilogramm Salzsäure der Konzentrationen 12% und 20% muss man mischen, um 10 kg Salzsäure der Konzentration 15% zu erhalten?

Wir bezeichnen

$x =$ Masse der 12%-igen Salzsäure in kg

$y =$ " " 20%-igen " " "

Die obige Frage lässt sich damit wie folgt formulieren:

Wie sieht die Lösungsmenge der Gleichungen

$$x + y = 10 \quad (I)$$

$$0{,}12x + 0{,}2y = 0{,}15 \cdot 10 = 1{,}5 \quad (II)$$

{"ohne kg"

aus?

1. Lösungsmöglichkeit: Einsetzungsverfahren:

Wir formen (I) nach x um:

$$x = 10 - y \quad (I')$$

(I') in (II): $0{,}12(10-y) + 0{,}2y = 1{,}5$

$\Leftrightarrow 1{,}2 - 0{,}12y + 0{,}2y = 1{,}5$

$\Leftrightarrow 0{,}08y = 0{,}3$

$\Leftrightarrow y = 3{,}75$

In (I'): $x = 10 - 3{,}75 = 6{,}25$

2. Lösungsmöglichkeit: Additionsverfahren

$0{,}12 \cdot (I) \Rightarrow 0{,}12x + 0{,}12y = 1{,}2 \quad (I)'$

$(II - I') \Rightarrow 0{,}12x + 0{,}2y - (0{,}12x + 0{,}12y) = 1{,}5 - 1{,}2$

$\Rightarrow 0{,}08y = 0{,}3 \Rightarrow y = 3{,}75$

wie oben folgt mit (I): $x = 6{,}25$

1.2 Definition

Ein lineares Gleichungssystem (LGS)

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

besteht aus m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ und Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ sowie $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$.

Das LGS heißt homogen, falls $b_1 = \ldots = b_m = 0$ und sonst inhomogen.

1.3 Bemerkung:

Mit der Notation aus Def. 1.2 gilt für das Bsp. 1.1: Es ist ein LGS mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten sowie Koeffizienten

$a_{11} = 1,\ a_{12} = 1,\ a_{21} = 0{,}12,\ a_{22} = 0{,}2$ sowie $b_1 = 10,\ b_2 = 1{,}5$

1.4 Beispiel:

a) Wir betrachten das LGS

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (\mathrm{I})$$

$$2x_1 + 2x_2 = 2 \quad (\mathrm{II})$$

Wir formen (I) nach x_1 um: $x_1 = 1 - x_2$ und setzen in (II) ein:

$$2(1-x_2) + 2x_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = 2 \quad (\text{w})$$

Das bedeutet: Für beliebige Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, die $x_1 = 1 - x_2$ erfüllen, gelten (I) und (II). Daher hat das LGS unendlich viele Lösungen [z.B. $x_2 = 3, x_1 = -2$, $x_2 = -10, x_1 = 11$ usw.]

b) Wir betrachten das LGS

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (\mathrm{I})$$

$$2x_1 + 2x_2 = 4 \quad (\mathrm{II})$$

Wir formen (I) wieder um zu $x_1 = 1 - x_2$ und setzen in (II) ein:

$$2(1-x_2) + 2x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = 4 \quad \lightning$$

Das bedeutet, dass das LGS keine Lösung hat.

1.5 Definition

Wir betrachten ein LGS wie in Def 1.2.

Eine Lösung des LGS ist ein Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x_1, \dots, x_n$ alle Gleichungen des LGS erfüllen. Die Menge

$$\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{R}^n ;\ x \text{ ist Lösung des LGS}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

heißt Lösungsmenge des LGS.

Wir nennen ein LGS lösbar, falls $\mathbb{L} \neq \{\}$ gilt.

Wir nennen ein LGS eindeutig lösbar, falls $\mathbb{L}$ aus genau einem Punkt besteht.

Wir nennen ein LGS nicht lösbar, falls $\mathbb{L} = \{\}$ gilt.

1.6 Beispiel:

a) In Beispiel 1.4 a) gilt $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ;\ x_1 = 1 - x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}\ (\cancel{\text{und } x_2 \text{ ist beliebig}}) \}$

$$= \{ \begin{pmatrix} 1-x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ;\ x_2 \in \mathbb{R} \}$$

b) In Beispiel 1.4 b) gilt $\mathbb{L} = \{\}$

c) In Beispiel 1.1 gilt $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 6{,}25 \\ 3{,}75 \end{pmatrix} \}$, also ist das entsprechende LGS eindeutig lösbar.

1.7 Bemerkung:

Wir fragen uns ob man einem LGS ansehen (bzw. leicht bestimmen) kann, ob es eindeutig lösbar ist oder ob es unendl. viele Lösungen hat. Wir werden dazu versch. Verfahren kennenlernen, die algorithmischer und dadurch häufig schneller als das Einsetzungsverfahren funktionieren.

Zunächst vereinfachen wir aber die Notation:

1.8 Definition

Wir schreiben das LGS aus Def. 1.2 auch als

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ schreiben wir auch

$$(A|b).$$

Die Tabelle A bezeichnen wir als Matrix mit m Zeilen und n Spalten ($(m\times n)$-Matrix).
Wir schreiben $M(m\times n)$ oder $\mathbb{R}^{m\times n}$ für die Menge aller $(m\times n)$-Matrizen.
Für homogene LGS schreibt man auch A statt $\left(A\,\middle|\,\begin{smallmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{smallmatrix}\right)$.

1.9 Beispiel:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$ steht für das LGS aus 1.4 a)

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$ steht für das LGS aus 1.4 b)

c) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 0{,}12 & 0{,}2 & 1{,}5 \end{array}\right)$ ~~steht~~ steht für das LGS aus 1.1

d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$ steht für "$\begin{aligned} 3x_1 + x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 2x_2 - x_4 &= 1 \\ 4x_4 &= 2 \end{aligned}$".

e) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{array}\right)$ steht für "$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$".

1.10 Beispiel:

Wir betrachten das LGS, das durch folgende Matrix gegeben ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right), \text{ d.h. } \text{"}\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 4 && (I) \\ -2x_2 + 5x_3 &= 0 && (II) \\ -40x_3 &= -10 && (III) \end{aligned}\text{"}$$

Dieses hat eine sehr einfache Struktur und ist daher sehr leicht lösbar:

(III) $\Leftrightarrow x_3 = 1/4$

Einsetzen in (II) liefert: $-2x_2 + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{8}$

Einsetzen in (I) liefert: $3x_1 + 5\cdot\frac{5}{8} + 2\cdot\frac{1}{4} = 4 \Leftrightarrow 3x_1 = \frac{7}{2} - \frac{25}{8} = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{8}$.

Somit gilt: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/8 \\ 5/8 \\ 1/4 \end{pmatrix} \right\}$,

d.h. das LGS ist eindeutig lösbar.

1.11 Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hat Zeilenstufenform, wenn in jeder Zeile der erste von Null verschiedene Eintrag (von links gelesen) weiter rechts steht, als der erste solche Eintrag in der Zeile darüber.

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & * & * & \cdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Zeilen, deren Einträge alle Null sind, dürfen sich ~~also~~ nur ganz unten in der Matrix befinden. Ein LGS hat Zeilenstufenform, wenn die zugehörige Matrix Zeilenstufenform hat.

1.12. Beispiele:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \text{ und } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right)$$

haben Zeilenstufenform,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \text{ und } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right) \text{ nicht.}$$

1.13 Bemerkung:

Bei LGS in Zeilenstufenform kann durch die Einsetzungsmethode sehr leicht ermittelt werden, ob eine Lösung existiert und diese auch bestimmt werden. Gegebenenfalls müssen dazu eine oder mehrere Variablen "frei gewählt" werden.

1.14 Beispiele:

a) Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right)$$

entspricht
$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -40x_3 &= -10 \end{aligned}$$

und hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/8 \\ 5/8 \\ 1/4 \end{pmatrix} \right\}$ (s. Bsp. 1.10)

b) Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

entspricht ebenfalls dem LGS aus a) (mit gleicher Lösungsmenge), da die zusätzliche Zeile "$0 = 0$" keine Bedeutung hat.

c) Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ist nicht lösbar ($\mathbb{L} = \{\}$), da die letzte Zeile "$0 = 1$" bedeutet.

d) Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right)$$

entspricht
$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 2x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 40x_5 &= -10 \end{aligned}$$

und hat also die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1/8 \\ \vdots \end{pmatrix} , x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Kann man jedes LGS einfach (ohne Ändern der Lösungsmenge!) auf diese Gestalt bringen?

1.15 Definition:

Sei ein LGS $(A|b)$ gegeben. Unter elementaren Zeilenumformungen verstehen wir folgende Operatio

(1) Vertauschen zweier Zeilen

(2) Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null.

(3) Addieren eines Vielfaches einer beliebigen Zeile zu einer anderen.

1.16 Bemerkung:

Man kann zeigen, dass sich durch elementare Zeilenumformungen die Lösungsmenge eines LGS nicht ändert.

1.17 Satz (Gauß-Algorithmus)

Jedes LGS lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen.

~~1.18 Beispiel (Anwendung des Gauß-Algorithmus)~~

$$\cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,7 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{array}\right)}$$

1.18 Beispiel (Anwendung des Gauß-Algorithmus)

1. Schritt: Brüche/Kommazahlen weg $\xrightarrow{\cdot 10}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,3 & 0,0 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

2. Schritt: Zeile mit 1 ganz links nach oben tauschen $\rightsquigarrow$ (I) <-> (II)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

3. Schritt: 1. Spalte unter der Diagonale eliminieren $\rightsquigarrow$

(II) − 3(I)
(III) − 2(I)
(IV) − 2(I)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

4. Schritt: wann immer Nullzeilen auftauchen $\rightsquigarrow$ wegtauschen, d.h. "nach unten" $\rightsquigarrow$ (III) <-> (IV)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

5. Schritt: 2. Spalte unter der Diagonale eliminieren $\rightsquigarrow$ 3(III) + 2(II)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus $-4x_3 = 2$ erhält man $x_3 = -\frac{1}{2}$ und damit aus

$-3x_2 + 1 = 1$, dass $x_2 = 0$ gilt.

Schließlich folgt aus $x_1 + 0 + (-\frac{1}{2}) = 1$, dass $x_1 = \frac{3}{2}$ gilt. Das liefert die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$.