

uf dazu die str. mon. wachsende Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3$ mit $f'(0) = 0$

7.9 Definition:

Sei $f: J_{a,b} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in J_{a,b}$

a) Gibt es $\delta > 0$ so, dass $f(y) \geq f(x_0)$ für alle $y \in J_{x_0-\delta, x_0+\delta} \subseteq J$ gilt,
so heißt x_0 lokales Minimum von f .
d.h. "in der Nähe von x_0 "

b) Gibt es $\delta > 0$ so, dass $f(y) \leq f(x_0)$ für alle $y \in J_{x_0-\delta, x_0+\delta} \subseteq J$ gilt,
so heißt x_0 lokales Maximum von f .

c) Ist x_0 ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum, so heißt x_0 auch lokale Extremstelle.

d) gilt $f(y) \geq f(x_0)$ sogar für alle $y \in J_{a,b}$, so heißt x_0 globales Minimum
(analog definiert man globales Maximum, globale Extremstelle).

7.10 Satz:

Sei $f: J_{a,b} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in J_{a,b}$ (Anmerkung: Nicht $x_0 = a$,
 $x_0 = b$)

a) Ist f ein lokales Extremum in x_0 , so gilt $f'(x_0) = 0$

lokale Extrema können also höchstens an Stellen mit Ableitung 0 vorkommen.

Diese sind aber lediglich mögliche Extremstellen!

b) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so ist x_0 lokales Minimum von f .

c) Ist $f'(x_0) = 0$ " $f''(x_0) < 0$, " " x_0 " Maximum von f .

Ist $f'(x_0) = 0$ " $f''(x_0) = 0$, " " keine Aussage möglich.

7.11 Beispiel:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^4$; $f'(0) = 4 \cdot 0^3 = 0$, $f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto -x^4$; $g'(0) = -4 \cdot 0^3 = 0$; $g''(0) = -12 \cdot 0^2 = 0$

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3$; $h'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, $h''(0) = 6 \cdot 0 = 0$

7.12 Satz:

Sei $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann hat f ein globales Maximum und ein globales Minimum.

Bemerkung:

Wie bestimmt man Minima und Maxima des ~~stetig~~ ^{differenzierbaren (insbes. stetig)} Funktion $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$?

Mit 7.10 findet man alle Kandidaten im Inneren. Dann vergleicht man deren Funktionswerte mit $f(a)$ und $f(b)$. Der größte bzw. kleinste liefert glob. Minimum bzw. Maximum.

7.13 Beispiel:

a) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2+1} = (x^2+1)^{-1}$ ist stetig.

Es gilt

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

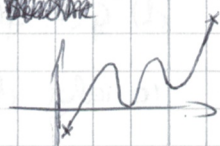
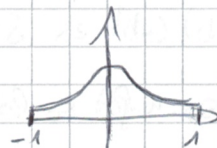
Also ist $f'(x) = 0$ genau für $-2x = 0$, also für $x = 0$.

Kandidaten für globale Extrema: $-1, 0, 1$ mit $f(-1) = \frac{1}{2} = f(1), f(0) = 1$.

Also ist 0 globales Max., -1 und 1 sind globale Minima. ~~Beachte~~

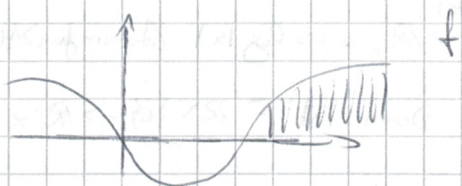
Beachte $-f'(1) = f'(-1) = \frac{1}{2} \neq 0$

b) Es können auch nur die Randwerte die Extrema sein, vgl.



VIII Integration

Wir beschäftigen uns mit der Frage, wie wir den Flächeninhalt unter einem Graphen ausrechnen können:



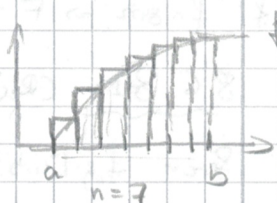
Hierbei beschränken wir uns auf stetige Funktionen, da bei solchen Funktionen der Flächeninhalt immer bestimmt werden kann.

8.1 Satz / Definition

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

und wir nennen diesen Grenzwert das Integral von a bis b über f.



~~8.2 Definition:~~

~~Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar mit $F' = f$, so heißt~~

8.2 Definition

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so heißt F Stammfunktion von f.

8.3 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

a) $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ ist eine Stammfunktion von f.

b) Ist $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

8.4 Beispiel:

$$\int_1^5 \frac{1}{x^2} dx = ? \quad G(x) = -\frac{1}{x} \text{ erfüllt } G'(x) = \frac{1}{x^2}, \text{ also}$$

$$\int_1^5 \frac{1}{x^2} dx = \underbrace{G(5) - G(1)}_{=[G(x)]_1^5} = -\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{4}{5}$$

8.5 Beispiele:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto c$. Dann ist $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto cx$ Stammfunktion.

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^n$ ^{$n \neq -1$} " " $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ Stammfunktion.

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$. Dann ist $F: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \log|x|$ Stammfunktion.

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ für $n \neq 1$. Dann ist $F: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{-n+1} x^{-n+1}$ Stammfunktion.

e) $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) $\Rightarrow F:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}; F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ Stammfunktion.

f) $f = \sin \Rightarrow F = -\cos$, $f = \cos \Rightarrow F = \sin$, $f = \exp \Rightarrow F = \exp$.

8.6 Satz (Rechenregeln)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

a) gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so folgt $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

b) $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$, $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

c) Für $c \in [a, b]$ gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \text{„dabei“ } \int_c^c f(x) dx = 0$$

8.7 Bemerkung:

Wir schreiben oft $\int f(x) dx = F(x)$, z.B. $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$ und meinen damit, dass F eine Stammfunktion von f ist.

Stammfunktionen sind nicht eindeutig, sondern können sich um eine Konstante unterscheiden, mehr aber auch nicht!

Also: F, G Stammfkt von $f \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: F(x) = G(x) + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

8.8 Beispiel:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$. Dann ist $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{3} x^3$ eine Stammfkt von

f , aber auch $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{3} x^3 + 4$.

Notation:
Für $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
stetig schreiben wir
 $\int_a^b f(x) dx$
 $= - \int_b^a f(x) dx$

8.9 Satz (partielle Integration)

Sind $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt:

$$\int_a^b f'(t) g(t) dt = [f(t) g(t)]_a^b - \int_a^b f(t) g'(t) dt$$

8.10 Beispiel:

a) $\int_0^2 x e^x dx = ?$

$f'(x) = e^x$, $g(x) = x$ und es folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^2 x e^x dx &= [x e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x \cdot 1 dx \\ &= 2 \cdot e^2 - 0 - [e^x]_0^2 = 2 \cdot e^2 - (e^2 - e^0) \\ &= e^2 + 1. \end{aligned}$$

b) $\int_1^2 \log(x) dx = ?$ Setze $f'(x) = 1$, $g(x) = \log(x)$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \int \log(x) dx &= [x \log(x)] - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \log(x) - \int 1 dx \\ &= x \log(x) - x \end{aligned}$$

c) $\int \sin(x) \cos(x) dx = ?$ Setze $f'(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ Es folgt:

$$\begin{aligned} \int \sin(x) \cos(x) dx &= [-\cos(x) \cdot \cos(x)] - \int -\cos(x) (-\sin(x)) dx \\ &= -\int \cos(x) \sin(x) dx \end{aligned}$$

Also: $2 \int \sin(x) \cos(x) dx = -\cos(x)^2$ oder $\int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{-\cos(x)^2}{2}$

8.11 Satz (Substitution)

Seien $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $u: [a,b] \rightarrow [c,d]$ diffbar mit stet. Ableitung,

so gilt

$$\int_a^b f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt.$$

8.12 Beispiel

a) $\int_2^6 t e^{t^2} dt = ?$ $u: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $u(t) = t^2 \Rightarrow u'(t) = 2t.$

Also: $\int_2^6 t e^{t^2} dt = \int_2^6 \frac{1}{2} \cdot 2t e^{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_2^6 u'(t) e^{u(t)} dt = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} e^t dt = \frac{1}{2} (e^{b^2} - e^{a^2})$

~~Wichtig ist~~

~~Wichtig ist~~

~~Wichtig ist~~

b) Auch möglich sind "Verschiebungen", z.B.:

$\int_0^3 \frac{t}{(t+1)^2} dt = ?$ $u: [0,3] \rightarrow [1,4]$ mit $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$
 $u(t) = t+1 \Rightarrow u'(t) = 1$
 $\int_0^3 \frac{t}{(t+1)^2} dt = \int_0^3 \frac{u(t)-1}{u(t)^2} dt = \int_1^4 f(u(t)) u'(t) dt = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \frac{x-1}{x^2} dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_1^4 x^{1/2} - x^{-1/2} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - 2 x^{1/2} \right]_1^4 \\
 &= \frac{2}{3} 4^{3/2} - 2 4^{1/2} - \frac{2}{3} 1^{3/2} + 2 \cdot 1^{1/2} \\
 &= \frac{4}{3} + \cancel{2\sqrt{2}(1 - \frac{2}{3})} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{2} \\
 &= \frac{2}{3} \cdot 8 - 4 + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

8.13 Definition

a) Sei $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. f heißt (uneigentlich) Riemann integrierbar, falls der Grenzwert

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

existiert. Analog für $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

b) Ist $f: [a, b]$ an der Stelle b nicht def., so definieren wir

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{R \nearrow b} \int_a^R f(x) dx$$

und entsprechend für $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

c) Sind beide Grenzen problematisch, also etwa $f: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

so definieren wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx$$

Analog für $f: [a, \infty)$ mit $\int_a^\infty f(x) dx$

Merkung: Es ist nicht $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$.

8.14 Beispiel:

~~Wiederholung~~ a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{R \searrow 0} \int_R^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{R \searrow 0} [2 x^{1/2}]_R^1$
 $= \lim_{R \searrow 0} 2 - 2R^{1/2} = 2$

b) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{R \searrow 0} \int_R^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{R \searrow 0} [\log x]_R^1 = \lim_{R \searrow 0} (-\log(R)) = \infty$
 existiert nicht.

c) $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx = \int_{-\infty}^0 x^3 dx + \int_0^{\infty} x^3 dx$ existiert nicht,

obwohl $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x^3 dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-R}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^4}{4} - \frac{(-R)^4}{4} = 0$ stet.