

IX Differentialgleichungen

Bei vielen (z.B. physikalischen) Vorgängen können die Abhängigkeiten der Größen voneinander durch sogenannte Differentialgleichungen beschrieben werden.

Dabei geht es darum, dass eine Größe durch eine Funktion $y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben wird und man auf diese Funktion wiederum kommt, indem man eine Gleichung löst, in der nicht nur y selbst sondern auch die Ableitungen von y vorkommen.

9.1 Beispiel

y beschreibe die Anzahl der Bakterien in einer Bakterienkultur.

Wir nehmen an, dass der Bakterienzuwachs y' proportional zur Anzahl $y = y(t)$ der zum Zeitpunkt t vorhandenen Bakterien ist, es gilt also

$$y'(t) = ay(t)$$

für alle $t \geq 0$ und ein $a > 0$.

Ebenso: radioaktiver Zerfall, aber mit $a < 0$.

9.2 Definition:

a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt

$$y'(t) = F(t, y(t)) \quad (1)$$

eine (gewöhnliche) Differentialgleichung erster Ordnung.
differenzierbare

Eine Funktion $y: J \rightarrow \mathbb{R}$ ($J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall) heißt Lösung dieser

Differentialgleichung, wenn $(t, y(t)) \in D$ für alle $t \in J$ und

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

für alle $t \in J$ gelten.

b) Solche Lösungen sind oft nicht eindeutig. Ein Anfangswertproblem ist eine Differentialgleichung (d.h. für uns der Form (1)) zusammen mit einem Anfangswert $y(t_0) = y_0$ für ein $(t_0, y_0) \in D$. Wir nennen eine Lösung der DGL Lösung des Anfangswertproblems, wenn sie zusätzlich $y(t_0) = y_0$ erfüllt.

9.3 Beispiel:

Die DGL aus Bsp. 9.1 hat die Form

$$y'(t) = a \cdot y(t)$$

Dort ist $D = \mathbb{R}^2$, $F: D \rightarrow \mathbb{R}$; $F(t, y) = a y$.

Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist $y_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y_c(t) = c e^{at}$ eine Lösung dieser DGL, denn y_c ist differenzierbar, es gilt $(t, y_c(t)) \in D$ für alle $t \in \mathbb{R}$

und $y_c'(t) = c \cdot a e^{at} = a \cdot y_c(t) = F(t, y_c(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Verlangt man zusätzlich einen Anfangswert, z.B. $y(0) = 3$, so kann man

durch $3 = y_c(0) = c \cdot e^{a \cdot 0} = c$ bestimmen, welche der y_c auch dieses AWP

lösen. In diesem Fall lediglich y_3 .

Gibt es solche Lösungen immer? Wie findet man sie? Sind sie eindeutig?

Eine sehr umfassende Antwort auf die erste und die letzte Frage gibt

9.4 Satz (Picard - Lindelöf)

Sei $D =]a, b[\times]c, d[\subseteq \mathbb{R}^2$ und $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ in jeder Variablen stetig differenzierbar, so gibt es zu jedem Punkt $(t_0, y_0) \in D$ ein Intervall

$J \subseteq \mathbb{R}$ so, dass $t_0 \in J$ gilt und eine Lösung $y: J \rightarrow \mathbb{R}$ des AWP

$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

existiert.

Sei $\tilde{y}: \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Lösung, so stimmen y und $\tilde{y}$ auf $J \cap \tilde{J}$ überein.

Der Satz sagt also aus: In vielen Fällen gibt es eine Lösung jedes AWP

und "in der Nähe von t_0 " ist diese sogar eindeutig.

Wie man auf die Lösung kommt, darüber sagt der Satz allerdings nichts!

Wir werden das nur in viel spezielleren Situationen untersuchen

9.5 DGL'en mit separierten Variablen

Sei $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ aus Def. 9.2 von der Form $F(t, x) = f(t) g(x)$

mit $D = J \times Y$, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ ($J, Y \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle), so nennen wir

die DGL

$$y'(t) = f(t) g(y(t)) \quad (= F(t, y(t)))$$

DGL mit separierten Variablen.

Beispiel:

$$y'(t) = t \cdot y(t), \quad y'(t) = t \cdot y(t) + t^2 \cdot y(t) = (t + t^2) y(t)$$

$$y'(t) = t = t \cdot 1, \text{ und sogar}$$

$$y'(t) = \log(\sqrt{t}) \cdot e^{\sin(y(t))} \quad \text{haben getrennte Variablen.}$$

$$y'(t) = y(t) + t, \quad y'(t) = e^{y(t) \cdot t} \quad \text{oder} \quad y'(t) = \sin(t y(t))$$

hingegen nicht.

Die Idee ist: Man soll mit "." bzw. ":" die Variablen t bzw. $y(t)$ "trennen", d.h. auf versch. Seiten bringen können.

Solche DGL sind lösbar, wenn man nur genügend gut integrieren kann.

Dazu betrachtet man

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$$

und integriert auf einem Intervall $[t_0, t]$ auf dem man durch $y(y(t))$ teilen darf:

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int_{t_0}^t f(t) dt$$

// substituieren $x = y(t)$

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{g(x)} dx =: B(y(t)).$$

Kann man $1/g$ und f integrieren, so muss man nur noch "B" auf die andere Seite bringen

Beispiel:

$$y'(t) = t \cdot y(t) \quad | : y(t), \quad \text{Wir wollen diese DGL nur auf } D = \mathbb{R} \times]0, \infty[\text{ lösen.}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = t \quad | \int \cdot dt$$

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int t dt$$

$$\ln(y(t)) = \frac{1}{2} t^2 + \tilde{c} \quad | e^{(\cdot)}$$

$$y(t) = e^{\frac{1}{2} t^2 + \tilde{c}} = e^{\frac{1}{2} t^2} \cdot \underbrace{e^{\tilde{c}}}_{=: c} = e^{\frac{1}{2} t^2} \cdot c$$

Gab es noch einen Anfangswert, so können wir auch c ermitteln.

Wegen dieser Zeile funktioniert das nur auf Intervallen $I \subset]0, \infty[$. Durch die Probe erkennt man aber, dass $y(t) = c \cdot e^{\frac{1}{2} t^2}$ überall eine Lösung der DGL ist.

Merzregel

Um sich die Substitution zu ersparen, schreibt man $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ und bringt "alles mit y nach links", "alles mit t nach rechts" und integriert dann.

$$\text{Also: } y'(t) = t \cdot y(t) \quad , \quad \text{Also: } \frac{1}{y} dy = t dt \quad \text{und dann} \\ \frac{dy}{dt} = t \cdot y \quad \int \frac{1}{y} dy = \int t dt \quad \text{was}$$

Achtung: Das ist keine legitime Rechnung (was soll das "-" in $\frac{dy}{dt}$ sein?), aber es ist eine Kurzregel, die die richtigen Ergebnisse liefert.

9.6 Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung:

Eine DGL der Form

$$y'(t) = f(t) y(t) + b(t)$$

mit $D = I \times J$, f.b. $J \rightarrow \mathbb{R}$ ($J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall) heißt lineare DGL 1. Ordnung.

Sie heißt homogen, falls $b(t) = 0$ für alle $t \in J$ gilt und sonst inhomogen.

Eine homogene lineare DGL 1. Ordnung ist also eine spezielle DGL mit getrennten Variablen, mit $g: J \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$. Wir lösen diese zuerst.

a) homogene lineare DGL 1. Ordnung

Das Vorgehen ist wie in 9.5. Allgemein erhält man:

$$y'(t) = f(t) y(t) \quad (I)$$

$$\Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = f(t)$$

$$\Rightarrow \log(y(t)) = \int f(t) dt$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\int f(t) dt}$$

Also: Ist F eine Stammfunktion von f , so ist e^F eine Lösung der DGL (I).

Beispiel:

$$y'(t) = \cos(t) y(t), \quad y(0) = 1$$

Dann ist $\int \cos(t) dt = \sin(t) + c$, also ist $y(t) = e^{\sin(t)+c}$ eine Lösung der DGL.

Mit dem Anfangswert ergibt sich $y(0) = e^{\sin(0)+c} = e^c$, also

ist $y(t) = e^{\sin(t)+c} = e^{\sin(t)} \cdot e^c = e^{\sin(t)}$ eine Lösung des AWP.

b) inhomogene DGL

Sei eine DGL der Form

$$y'(t) = f(t)y(t) + b(t) \quad (I)$$

gegeben und sei y_s eine Lösung von (I). Für jede weitere Lösung y von (I) gilt dann:

$$y_s'(t) - y'(t) = f(t)y_s(t) + b(t) - f(t)y(t) - b(t) = f(t)(y_s(t) - y(t)).$$

Also ist $y_s - y$ eine Lösung der entsprechenden homogenen linearen DGL.

Will man also alle Lösungen von (I) und nennt alle Lösungen der homogenen Version von (I), so kann man einfach $y_s + y_h$ für alle Lösungen y_h der homogenen Version von (I) betrachten.

Beispiel: $y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + t$

Für $y(t) = t^2$ gilt $2t = y'(t) = \frac{1}{t} \cdot t^2 + t = \frac{1}{t} y(t) + t$.

Also ist y_s eine Lösung dieser DGL.

Wegen $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} y \Rightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{1}{t} dt \Rightarrow \ln y = \ln t + \tilde{c} \Rightarrow y = t \cdot e^{\tilde{c}} = t \cdot c$

haben alle Lösungen der entsprechenden Gleichung die Form $y_h(t) = c \cdot t$.

Also hat eine bel. Lösung der inhomogenen DGL die Form $y(t) = t^2 + c \cdot t$.

Wie kommt man auf y_s ?

→ Variation der Konstanten

Die Lösung der homogenen Version hat immer die Form $c \cdot e^{(\dots)}$.

Ersetze das durch " $c(t) \cdot e^{(\dots)}$ " und setze in die inhomogene DGL ein, um

$c(t)$ zu bestimmen. So erhält man eine Lösung " $c(t) \cdot e^{(\dots)}$ " der inhomogenen DGL.

Im Beispiel oben:

Die homogene DGL $y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + t$ hat wie dort gesehen die Lösungen

$y(t) = c \cdot t$. Also: Ansatz $c(t) \cdot t$.

In DGL: $c'(t) \cdot t + c(t) = \frac{1}{t} c(t) \cdot t + t \quad | -c(t)$

$$c'(t) \cdot t = t \quad | : t$$

$$c'(t) = 1$$

Damit ist $y_s(t) = c(t) \cdot t = t \cdot t = t^2$ eine Lösung der inhomogenen DGL. Also: $c(t) = t$ ist eine Möglichkeit für c .