Kann man jedes LGS einfach (ohne Ändern der Lösungsmenge!) auf diese Gestalt bringen? VW 3
11.11.2016

1.15 Definition:

Sei ein LGS $(A|b)$ gegeben. Unter elementaren Zeilenumformungen verstehen wir folgende Operationen:

(1) Vertauschen zweier Zeilen

(2) Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null.

(3) Addieren eines Vielfaches einer beliebigen Zeile zu einer anderen.

1.16 Bemerkung:

Man kann zeigen, dass sich durch elementare Zeilenumformungen die Lösungsmenge eines LGS nicht ändert.

1.17 Satz (Gauß-Algorithmus)

Jedes LGS lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen.

~~1.18 Beispiel (Anwendung des Gauß-Algorithmus)~~

$$\cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,7 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{array}\right)}$$

1.18 Beispiel (Anwendung des Gauß-Algorithmus)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,3 & 0,0 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{array}\right) \underset{\cdot 10}{\overset{\text{1. Schritt: Brüche/Kommazahlen weg}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

2. Schritt: Zeile mit 1 ganz links nach oben tauschen

$$\underset{(\mathrm{I}) \leftrightarrow (\mathrm{II})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

3. Schritt: 1. Spalte unter der Diagonale eliminieren

$$\underset{\substack{(\mathrm{II}) - 3(\mathrm{I}) \\ (\mathrm{III}) - 2(\mathrm{I}) \\ (\mathrm{IV}) - 2(\mathrm{I})}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

4. Schritt: wann immer Nullzeilen auftauchen $\rightsquigarrow$ wegtauschen d.h. "nach unten"

$$\underset{(\mathrm{III}) \leftrightarrow (\mathrm{IV})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

5. Schritt: 2. Spalte unter der Diagonale eliminieren

$$\underset{3(\mathrm{III}) + 2(\mathrm{II})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus $-4x_3 = 2$ erhält man $x_3 = -\frac{1}{2}$ und damit aus

$-3x_2 + 1 = 1$, dass $x_2 = 0$ gilt.

Schließlich folgt aus $x_1 + 0 + (-\frac{1}{2}) = 1$, dass $x_1 = \frac{3}{2}$ gilt. Das liefert die

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$.

1.19 Bemerkung/Beispiel (LGS mit Parametern)

Ist das zu lösende LGS mit einem (oder mehreren) Parameter(n) gegeben, so ist der Gauß-Algorithmus immer noch anwendbar. Allerdings ist bei den elementaren Zeilenumformungen darauf zu achten, dass man weder durch Null dividiert noch eine Zeile, die man ändern will, mit Null multipliziert. Dazu sind ggf. Fallunterscheidungen nötig. Betrachte für $a \in \mathbb{R}$ etwa das LGS

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= 1 \\ -2x_1 + ax_2 + 2x_3 &= -1 \\ ax_1 + 2x_2 &= -1. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & a & 2 & -1 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\text{(geht für alle } a \in \mathbb{R}!)}{\overset{\substack{II + I \\ 2III - aI}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ \underset{2 \cdot a - a \cdot 2}{\underset{\shortparallel}{0}} & \underset{2 \cdot 2 - a \cdot 0}{\underset{\shortparallel}{4}} & \underset{2 \cdot 0 - a \cdot (-1)}{a} & \underset{2(-1) - a \cdot 1}{-2-a} \end{array}\right)$$

$$\overset{a \cdot III - 4II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ \underset{a \cdot 4 - 4 \cdot a}{\underset{\shortparallel}{0}} & 0 & \underset{a \cdot a - 4 \cdot 1}{\underset{\shortparallel}{a^2 - 4}} & \underset{a(-2-a) - 4 \cdot 0}{\underset{\shortparallel}{-2a - a^2}} \end{array}\right)$$

Achtung! Das geht nur für $a \neq 0$!

Also brauchen wir jetzt eine Fallunterscheidung:

1) $a \neq 0$. Dann haben wir also das LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 & -2a-a^2 \end{array}\right)$.
Wir brauchen eine erneute Fallunterscheidung!

1a) Es gelte $a^2 - 4 \neq 0$, d.h. $a \notin \{\pm 2\} = \{-2, 2\}$.
Dann folgt aus $(a^2-4)x_3 = -2a - a^2$, dass $x_3 = \frac{-2a - a^2}{a^2 - 4}$ gilt.
Weiter ist dann $x_3 = \frac{-2a-a^2}{a^2-4} = \frac{a(-2-a)}{(a-2)(a+2)} = \frac{-a(2+a)}{(a-2)(a+2)} = -\frac{a}{a-2}$.

Mit $a x_2 - \frac{a}{a-2} = 0$ folgt $a x_2 = \frac{a}{a-2}$, also $x_2 = \frac{1}{a-2}$.

Schließlich folgt aus

$$2x_1 + \frac{a}{a-2} = 1, \text{ dass } x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{a-2}\right)$$

In diesem Fall folgt also

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a-2}{a-2} - \frac{a}{a-2}\right)$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} \\ -\frac{a}{a-2} \end{pmatrix} \right\}, \qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{a-2}\right) = -\frac{1}{a-2} \text{ gilt.}$$

das LGS ist eindeutig lösbar für $a \notin \{0, 2, -2\}$.

1b) $a^2 - 4 = 0$, d.h. $a = 2$ oder $a = -2$. Jeweils einsetzen:

(i) $a=2$: die dritte Zeile ergibt $0 = -8$ ↯ Es folgt $\mathbb{L} = \{\}$

(ii) $a=-2$: die dritte Zeile ergibt $0=0$

Wir müssen dann das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lösen. Dies ergibt

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1+x_3}{2} \\ \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2) Es gilt $a = 0$. Dann ist der Schritt $III \to aIII - 4II$ nicht erlaubt.

Wir müssen also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

lösen:

$$\Big\downarrow \text{ Tausche (II) und (III)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Erhalte $x_3 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ und $x_1 = \frac{1}{2}$, also $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Zusammenfassend erhalten wir: Das LGS hat die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{\}, & \text{falls } a = 2 \\ \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{x_3}{2} \\ x_3/2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}, & \text{falls } a = -2 \\ \left\{ \begin{pmatrix} -1/a-2 \\ 1/a-2 \\ a/a-2 \end{pmatrix} \right\}, & \text{sonst (falls } a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2, -2\}) \end{cases}$$

1.20 Bemerkung (zur Lösungsmenge eines LGS)

a) wie schon mündlich erwähnt, gibt es für die Lösungsmenge genau drei Fälle: $\mathbb{L} = \{\}$, $\mathbb{L}$ besteht aus genau einem Punkt und $\mathbb{L}$ ist unendlich.

Zwischendinge (z.B $\mathbb{L} = \{\binom{14}{2}, \binom{3}{1}, \binom{8}{5}\}$) sind nicht möglich!

b) Hat ein LGS weniger Gleichungen als Unbekannte (d.h. $m < n$ in der Notation von 1.2), so nennen wir das LGS unterbestimmt. In diesem Fall ist das LGS entweder nicht lösbar oder wir können mindestens eine Variable frei wählen (d.h. $\mathbb{L}$ hat unendlich viele Elemente).

c) Ein homogenes LGS ist immer lösbar, denn $x_1 = \ldots = x_n = 0$ ist offenbar eine Lösung. Für ein homogenes LGS gilt also immer $\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ oder $\mathbb{L}$ hat unendl. viele Elemente.

Ein gutes Hilfsmittel bei der Frage, wieviele Lösungen ein LGS hat ist die sogenannte lineare Unabhängigkeit.

1.21. Definition

Die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

heißen linear unabhängig, falls gilt:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}: x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

[dabei ist $x_j \cdot a_j = \begin{pmatrix} x_j a_{1j} \\ \vdots \\ x_j a_{mj} \end{pmatrix}$ für $j = 1, \ldots, n$]

Andernfalls heißen $a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig.

Die Gleichung oben (mit Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$) ist äquivalent zu dem LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$$

Also sind $a_1, \ldots, a_n$ genau dann linear unabhängig, wenn dieses LGS außer dem Nullvektor keine Lösungen hat.

Das heißt umgekehrt:
Wollen wir wissen, wieviele Lösungen ein homogenes LGS hat, so müssen wir nur prüfen, ob die Spalten der entsprechenden Matrix linear unabhängig sind.

1.22 Bemerkung

a) Ist einer der Vektoren der Nullvektor, d.h. gibt es $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $a_j = 0$, so sind $a_1, \dots, a_n$ immer linear unabhängig, da beispielsweise

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \dots + 1 \cdot a_j + \dots + 0 \cdot a_n = 0$$

gilt.

b) Ist $n > m$, also die Anzahl an Vektoren größer als die Anzahl ihrer Komponenten, so folgt aus 1.15 b) und c), dass das entsprechende LGS unendlich viele Lösungen hat. Damit sind $a_1, \dots, a_n$ dann linear abhängig.

1.23 Beispiel

a) Sind $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}20\\40\\60\end{pmatrix}$ linear abhängig?

Ja, wegen $20 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}20\\40\\60\end{pmatrix} = 0$.

Allgemein gilt: 2 Vektoren sind linear abhängig g.d.w. einer ein Vielfaches des anderen ist.

b) Sind $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ linear abhängig?

Ja, wegen $2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 0$.

c) Sind $a_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}5\\-1\\1\\6\end{pmatrix}$ und $a_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Betrachte dazu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß-Algorithmus}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösungsmenge ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} x_3 \\ -\frac{1}{3} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Damit sind a_1, a_2, a_3 linear abhängig! z.B. ist $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \in L$ oder $\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} \in L$, es gilt also $\frac{4}{3} a_1 - \frac{1}{3} a_2 + a_3$

$= 4a_1 - a_2 + 3a_3 = 0$.

d) Hat $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ eine eindeutige Lösung? Für $a_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$ sieht man schnell, dass

$$-2a_1 + a_3 = 0$$

gilt. Die Vektoren sind linear unabhängig und das LGS hat keine eindeutige Lösung.

Allgemeiner als in a) gilt:
Vektoren $a_1, \dots, a_n$ sind zumindest linear unabhängig, wenn einer davon Vielfaches eines anderen ist.

e) Die Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, da das LGS

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

nur die Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat.

f) Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig nach Bemerkung 1.22 b).