

2. Matrizen und Determinanten

Wir haben bereits gesehen, dass die Lösung eines LGS $A(b)$ maßgeblich von der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ abhängt.

Im Folgenden werden wir daher Matrizen als eigenständige mathematische Objekte ansehen und für diese Rechenregeln aufstellen. Besonders wichtig wird dabei das Invertieren einer Matrix sein.

2.1 Definition. Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definieren wir die Abbildung $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto A \cdot x := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$.

2.2 Bemerkung. Mit der Notation aus obiger Definition entspricht $A(b)$ der Gleichung $A \cdot x = b$, wobei $b \in \mathbb{R}^n$.

Diese Definition ist der Ausgangspunkt der folgenden Definition.

2.3 Definition (i) Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{ij})_{i,j} = (\alpha \cdot a_{ij})_{i,j} \quad (\text{Skalares Vielfache})$$

(ii) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir definieren

$$A + B = (a_{ij})_{i,j} + (b_{ij})_{i,j} = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j} \quad (\text{Summe})$$

(iii) Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$. Wir definieren

$$C = A \cdot B = (a_{ij})_{i,j} \cdot (b_{ij})_{i,j} = (c_{ij})_{i,j}$$

mit

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

für $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, l$ („i-te Spalte, j-te Zeile“). Wir

nennen C das Matrixprodukt von A und B .

2.4 Bemerkung. In Teil (iii) ist das Matrixprodukt nur dann definiert, wenn die ^{Anzahl der} Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt!

2.5 Beispiel. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \\ (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 2 & (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-3) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -2 & 6 & -10 \end{pmatrix}$$

Hingegen ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ nicht definiert.

2.6 Bemerkung. Die Funktion f_A aus Definition 2.1 ist eine lineare Abbildung, d.h. es gelten

(i) $A(x+y) = Ax + Ay$ und

(ii) $A(\alpha x) = \alpha(Ax)$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

In der linearen Algebra zeigt man, dass ~~es~~ zu jeder linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Matrix A existiert, sodass

$$f(x) = A \cdot x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Mit der letzten Bemerkung können wir einige geometrische Phänomene im $\mathbb{R}^n$ durch Matrizen beschreiben

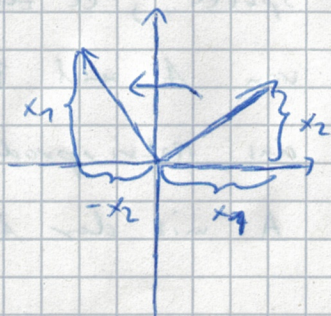
2.7 Beispiel. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung um 90° (gegen den Uhrzeigersinn).

Für $x \in \mathbb{R}^2$ gilt nämlich

$$f_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$



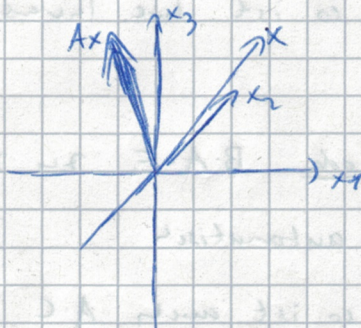
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hingegen beschreibt eine Spiegelung eines Vektors $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

an der x_2 - x_3 -Ebene. Es gilt

$$Ax = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



2.8 Rechenregeln für Matrizen

(i) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (passende Größen) (Assoziativ)

(ii) $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ (Distributiv)

(iii) Im Allgemeinen gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

Im Fall $n=m=1$ reduziert sich ein LGS $(A \cdot x = b)$ nach

Bemerkung 2.2 auf die Gleichung

$$a \cdot x = b$$

Falls $a \neq 0$, können wir die Gleichung durch

$$x = \frac{1}{a} b = a^{-1} b$$

Lösen.

Finden wir im Fall $n \neq 1$ oder $m \neq 1$ eine Matrix A^{-1} , sodass

$$x = A^{-1} b?$$

Dies führt zu dem Begriff der inversen Matrix.

2.9 Definition. (i) Mit

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

bezeichnen wir die Einheitsmatrix der Größe n .

(i) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt invertierbar, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, so dass $A \cdot B = E_n$ und $B \cdot A = E_n$ gelten. B heißt dann inverse Matrix zu A und wir schreiben $B = A^{-1}$.

2.70 Bemerkung (i) Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt immer $A E_n = A = E_n A$.

(ii) Ist eine Matrix invertierbar, so ist ihre Inverse eindeutig bestimmt.

(iii) Man braucht nur $A \cdot B = E_n$ oder $B \cdot A = E_n$ zu zeigen; die andere Gleichung folgt dann automatisch.

(iv) Sind $A, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so ist auch $A \cdot C$ invertierbar mit $(A \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot A^{-1}$.

(v) Die Inverse von E_n ist E_n .

2.71 Beispiel Die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (Drehung um 90°)

ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (Drehung um -90°), denn

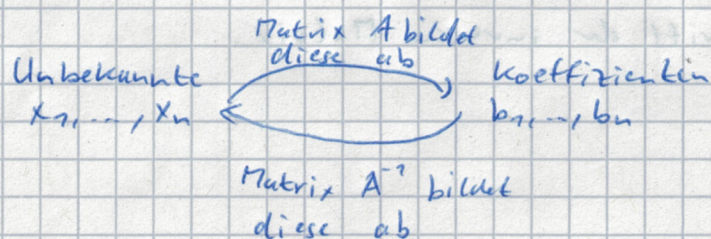
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

2.72 Satz (i) Eine $n \times n$ -Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn das zugehörige LGS $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ nur die Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ hat.

(ii) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so hat jedes LGS der Form $Ax = b$ (bzw. $(A|b)$) genau eine Lösung! Diese ist gegeben durch $x = A^{-1}b$, also indem man die inverse Matrix von A auf b anwendet.

2.73 Bemerkung (i) zu 2.72 (i): Ein homogenes LGS hat mehr als eine Lösung, falls die Matrix nicht invertierbar ist.

(ii) Schemabild zu Satz 2.72



Wir können uns nun die zwei folgenden Fragen stellen:

(i) Wie entscheidet man ob eine Inverse existiert?

(ii) Falls eine existiert, wie berechnet man sie?

2.7.4 Berechnung der inversen Matrix (mittels Gaußalgorithmus)

(i) Schreibe

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (A|E_n)$$

(ii) Führe den Gaußalgorithmus aus, sodass wir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1 & * & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & d_n & * \end{array} \right)$$

erhalten. Hierbei werden die Zeilenumformungen auch auf der rechten Seite einfach mit ausgeführt.

Die Matrix auf der linken Seite hat jetzt die Gestalt einer „oberen Dreiecksmatrix“.

(iii) Ist ein $d_i = 0$, so ist A nicht invertierbar.

Andernfalls; führe mit elementaren Zeilenumformungen fort bis wir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array} \right) \quad (E_n|B)$$

erhalten. Die Matrix B auf der rechten Seite ist dann die inverse Matrix zu A .

2.7.5 Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{A \\ \text{II} \rightarrow 3\text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} \rightarrow \text{III} + \text{I}}]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$-3, -2, 2 \neq 0 \Rightarrow$ invertierbar

$$\begin{array}{l} \sim \\ \text{I} \rightarrow \text{I} - \text{III} \\ \text{II} \rightarrow \text{II} - \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \sim \\ \text{I} \rightarrow 2\text{I} + \text{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 \sim \\
 I \rightarrow (-\frac{1}{6})I \\
 II \rightarrow (-\frac{1}{2})II \\
 III \rightarrow \frac{1}{2}II
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}
 \end{array} \right)$$

A^{-1}

Gibt es noch weitere Möglichkeiten die Invertierbarkeit einer Matrix zu überprüfen? $\rightarrow$ Determinante