

Wir können uns nun die zwei folgenden Fragen stellen:

(i) Wie entscheidet man ob eine Inverse existiert?

(ii) Falls eine existiert, wie berechnet man sie?

2.7.4 Berechnung der inversen Matrix (mittels Gaußalgorithmus)

(i) Schreibe

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (A|E_n)$$

(ii) Führe den Gaußalgorithmus aus, sodass wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & * & * \\ \vdots & & \\ 0 & d_n & * \end{array} \right)$$

erhalten. Hierbei werden die Zeilenumformungen auch auf der rechten Seite einfach mit ausgeführt.

Die Matrix auf der linken Seite hat jetzt die Gestalt einer „oberen Dreiecksmatrix“.

(iii) Ist ein $d_i = 0$, so ist A nicht invertierbar.

Andernfalls; führe mit elementaren Zeilenumformungen fort bis wir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array} \right) \quad (E_n|B)$$

erhalten. Die Matrix B auf der rechten Seite ist dann die inverse Matrix zu A .

16-11-25 2.7.5 Beispiel

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)}_A \xrightarrow{\substack{\text{II} \rightarrow 3\text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} \rightarrow \text{III} + \text{I}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$-3, -2, 2 \neq 0 \Rightarrow$ invertierbar

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{I} \rightarrow \text{I} - \text{III} \\ \text{II} \rightarrow \text{II} - \text{III}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \rightarrow 2\text{I} + \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \sim \\ I \rightarrow (-\frac{1}{6})I \\ II \rightarrow (-\frac{1}{2})II \\ III \rightarrow \frac{1}{2}II \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

A^{-1}

Gibt es noch weitere Möglichkeiten die Invertierbarkeit einer Matrix zu überprüfen? $\rightarrow$ Determinante

2.7.7 Definition. Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann die Determinante $\det(A) \in \mathbb{R}$ definiert werden:

(a) $n=2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det(A) = ad - bc$

(b) $n=3$: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $\det(A) = \underline{a \cdot e \cdot i} + \underline{b \cdot f \cdot g} + \underline{c \cdot d \cdot h} - \underline{g \cdot e \cdot c} - \underline{h \cdot f \cdot a} - \underline{i \cdot d \cdot b}$

Regel von Sarrus:

a	b	c	a	b
d	e	f	d	e
g	h	i	g	h

(Red arrows indicate the terms to be added and subtracted in the Sarrus rule.)

(c) $n \geq 4$ kompliziert, siehe später

2.7.8 Beispiel (a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

(b) $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -5$

(c) $\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \cdot 0 - (-3) \cdot 2 \cdot 3$
 $= -2 + 18 = 16$

0	3	1	0	3
2	1	-1	2	1
0	-1	-3	0	-1

2.7.9 Rechenregeln für Determinante (a) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebige Matrizen, so ist $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

(b) Für die Einheitsmatrix gilt: $\det(E_n) = 1$.

(c) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so ist $\det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Der folgende Satz zeigt die Nützlichkeit der Determinante.

2.2.0 Satz. Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so sind die folgenden Bedingungen

äquivalent (d.h. gilt eine Bedingung, dann gelten alle. Gilt eine nicht, dann gilt keine):

(i) $\det(A) \neq 0$

(ii) A ist invertierbar

(iii) Die Spalten von A , also die Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ sind

linear unabhängig

(iv) Die Zeilen von A , also die Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ sind

linear unabhängig

(v) Das homogene LGS $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ hat nur die Lösung $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(vi) Für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ ist das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar und die Lösung ist $x = A^{-1}b$.

2.2.1 Beispiel. (a) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ invertierbar?

Nach Beispiel 2.1.8 (c) ist $\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 16 \neq 0$, also

invertierbar.

(b) Betrachte das LGS

$$3x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$-x_2 - 3x_3 = 0$$

Wir wissen, dass $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ immer eine Lösung ist. Gibt es weitere?

Betrachte die zugehörige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Diese ist invertierbar nach (a), also gibt es keine weiteren Lösungen.

(a) Betrachte das LGS

$$3x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$-x_2 - 3x_3 = 3.$$

Besitzt dieses eine Lösung? Wenn ja, ist diese eindeutig?

Nach (a) ist die zugehörige Matrix invertierbar. Also ist das LGS eindeutig lösbar $Ax=b \Rightarrow x=A^{-1}b$, wobei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Um die Lösung zu erhalten, muss man aber A^{-1} bestimmen.

(b) Sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ linear un-

abhängig, d.h. folgt aus $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ schon

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$? Antwort: ja, denn v_1, v_2, v_3 sind die Spalten der invertierbaren Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

(c) Sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ und berechne $\det(A) = 0$. Also sind

die Vektoren linear unabhängig.

Es gilt nämlich: $1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 - v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(f) Was ist die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}?$$

Wir bezeichnen mit $z_1, \dots, z_5$ die Zeilenvektoren von A.

Dann gilt: $2 \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 + 0 \cdot z_3 + 0 \cdot z_4 - z_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. die

Zeilenvektoren sind linear abh. und damit $\det(A) = 0$.

(g) Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & a & 2 & -1 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

lösen? (Vergleiche Beispiel 7.19). Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & a & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = 0 + 0 + 4 + a^2 - 8 - 0 = a^2 - 4$$

Ist $a = 2$ oder $a = -2$, so ist $\det(A) = 0$, das LGS hat also entweder keine oder unendlich viele Lösungen

$$(a = 2: \mathbb{L} = \emptyset, a = -2: \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\lambda \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\})$$

Für $a \neq 2$ und $a \neq -2$ ist $\det(A) \neq 0$, also das LGS eindeutig lösbar ($\mathbb{L} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} \\ -\frac{a}{a-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a-2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$)

2.22 Satz. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad \text{Dann gilt}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Frage: Was passiert mit der Determinante, wenn man elementare Zeilenumformungen durchführt?

2.23 Satz. (i) Vertauscht man in einer Matrix eine Zeile, so

ändert sich das Vorzeichen der Determinante ($A \rightsquigarrow \tilde{A}$, $\det(\tilde{A}) = -\det(A)$)

(ii) Multipliziert man eine Zeile mit einer Zahl ungleich 0,

so ändert sich der Wert der Determinante um diesen

$$\text{Faktor } (A \xrightarrow{\alpha} \tilde{A} \Rightarrow \det(\tilde{A}) = \alpha \cdot \det(A))$$

(iii) Addiert man ein Vielfaches einer beliebigen Zeile zu einer anderen, so ändert sich die Determinante nicht.

2.2.4 Beispiel (i) $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-8) = -48$

(ii) $\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = ?$

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \rightarrow 3 \cdot III + II} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = 16$

2.2.5 Satz/Bsp (Laplace'scher Entwicklungssatz)

Betrachte

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

① Wähle eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen

Hier z.B. die 3-te Zeile, also $i=3$ (Bei Spalte: j)

② Berechne folgende Determinanten:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -7$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -5$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ müssen nicht

berechnet werden, da im Schnitt die 0 steht.

③ Dann ist $\det(A) = \underbrace{(-1)^{i+1} \cdot 2}_{=-14} - (-7) + \underbrace{(-1)^{i+2} \cdot 4}_{=20} \cdot (-5) = 6$

Allgemein: $\det(A) = (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \det(A_{i1}) + \dots + (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \det(A_{in})$
Matrix ohne i -te Zeile und 1 -te Spalte

(Entwicklung nach i -ter Zeile)

$$\text{bzw. } \det(A) = (-1)^{j+1} \det(A_{\uparrow j}) + \dots + (-1)^{j+n} \cdot a_{nj} \det(A_{\downarrow j})$$

Matrix ohne j -te Spalte und i -te Zeile

(Entwicklung nach j -ter Spalte)