

2.2.4 Beispiel (i) $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-8) = -48$

(ii) $\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = ?$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{I \leftrightarrow II \\ \boxed{-1}}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{III \rightarrow 3 \cdot III + II \\ \boxed{\frac{1}{3}}}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = 16$$

2.2.5 Satz/Bsp (Laplacescher Entwicklungssatz)

16-12-02

Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

① Wähle eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen

Hier z.B. die 3-te Zeile, also $i=3$ (Bei Spalte: j)

② Berechne folgende Determinanten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & \boxed{4} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \boxed{0} & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \boxed{2} \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ müssen nicht }$$

berechnet werden, da im Schritt die 0 steht.

$$\textcircled{3} \text{ Dann ist } \det(A) = \underbrace{(-1)^{i+1} \cdot \boxed{2} \cdot (-7)}_{=-74} + \underbrace{(-1)^{i+2} \cdot \boxed{4} \cdot (-5)}_{=20} = 6$$

$$\text{Allgemein: } \det(A) = (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \det(A_{i1}) + \dots + (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \det(A_{in})$$

Matrix ohne i -te Zeile und j -te Spalte

(Entwicklung nach i -ter Zeile)

$$\text{bzw. } \det(A) = (-1)^{j+1} \det(A_{1j}) + \dots + (-1)^{j+n} \cdot a_{nj} \det(A_{nj})$$

Matrix ohne j -te Spalte und i -te Zeile

(Entwicklung nach j -ter Spalte)

2.2 b Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der 2. Spalte:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 72$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -33$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -23$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(A) &= (-1) \cdot (-1) \cdot 72 + 0 - (-5) \cdot (-33) + 2 \cdot (-23) \\ &= 72 - 165 - 46 = -139 \end{aligned}$$

3. Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir wissen, dass A eine Abbildung

$$f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$$

„induziert“. Es stellt sich nun die Frage, ob es Vektoren gibt, die „invariant“ unter dieser Abbildung sind, d.h. $Ax = x$, oder zumindest „fast invariant“, d.h. es gibt eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $Ax = \lambda x$. Im letzten Fall wird der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ also nur gestaucht bzw. gestreckt.

Falls solche Vektoren existieren, wie findet man diese und die entsprechenden λ 's?

3.1 Definition. Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so heißt $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A , falls es einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ (!) gibt, sodass $Ax = \lambda x$ gilt. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A , so heißen alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = \lambda x$ Eigenvektor zu λ .

3.2 Bemerkung. Eigenvektoren sind nicht eindeutig! Falls $x \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist, so ist auch $\alpha \cdot x$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$ ein Eigenvektor zum EW λ .

3.3 Beispiel. (a) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, so sind $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

Eigenwerte von A , denn für $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $Ax_1 = \lambda_1 x_1$.

für $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, für $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $Ax_3 = \lambda_3 x_3$.

(b) Sind $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, so ist

$$Ax = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, Ay = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot y \text{ und } Az = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = z.$$

Somit ist x kein Eigenvektor, aber y ist einer zum EW 2, z zum EW 1.

k) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, so sind $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V$, denn

$Ax = 2x$ und $Ay = 0 \cdot y = 0$ darf auch EW sein!

Frage: Wie findet man ELW und ELV?

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (\lambda E_n - A)x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein homogenes LGS mit der Matrix $B = \lambda E_n - A$

und $Bx = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir wollen aber nun, dass dieses LGS eine

Lösung $x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Nach Satz 2.20 darf B also nicht

invertierbar sein, d.h. es muss $\det(\lambda E_n - A) = \det(B) = 0$ sein.

Der Ausdruck $\det(\lambda E_n - A)$ ist ein Polynom vom Grad n , dessen Nullstellen man bestimmen muss.

3.4 Definition. Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so heißt $p_A(\lambda) = \det(\lambda E_n - A)$

$(\lambda \in \mathbb{R})$ das charakteristische Polynom von A .

3.5 Beispiel. (a) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, so ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda E_3 - A) = \det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix} \right) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \end{aligned}$$

Nullstellen: 1, 2, 3

(b) Ist $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, so ist

$$p_A(\lambda) = \det \left(\begin{pmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 3 & \lambda+1 \end{pmatrix} \right) = (\lambda-4)(\lambda+1) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

Nullstellen: 1, 2

(c) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, so ist

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2)$$

Nullstelle: 0, 2

3.6 Satz. Die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_A .

Die Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ sind genau die Lösungen des homogenen LGS $(\lambda E_n - A)x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.7 Beispiel. Ist $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, so sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ die

Eigenwerte von A . Bestimmung der Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 1: 1 \cdot E_n - A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \rightarrow II+I} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \rightarrow (-\frac{1}{3})I} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein EV und damit auch alle Vielfachen

(z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$)

$$\lambda_2 = 2: 2 \cdot E_n - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \rightarrow 2II+3I} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \rightarrow (-\frac{1}{2})I} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein EV.

3.8 Bemerkung. Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so ist das char. Polynom p_A vom Grad n ; kann also höchstens n Nullstellen besitzen.

A besitzt also maximal n verschiedene Eigenwerte.

Nach Bemerkung 3.2 gibt es hingegen zu jedem EW unendlich viele EV.

Es kann auch mehr als ein Eigenvektor (x, y) mit $x \neq y$ zu einem EW geben, z.B.

3.9 Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ EW'e: 1 (doppelt), 2

$$1: 7E_n - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sind EV zum EW } 1$$

$$2: 2E_n - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ EV zum EW } 2$$

Frage: Gibt es zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ immer n EW'e (mit Vielfach gezählt)?

3.10 Beispiel: für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dann $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$.

p_A hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$, da $\lambda^2 \geq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dies führt uns auf die komplexen Zahlen.