

4. Komplexe Zahlen

Wir haben gesehen, dass ein Polynom $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ nicht unbedingt n verschiedene Nullstellen haben muss.

4.1 Definition (i) Wir bezeichnen mit i eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$, d.h. $i^2 = -1$. Wir nennen i die imaginäre Einheit.

(ii) Eine komplexe Zahl z ist eine Zahl der Form

$$z = a + ib = a + bi$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen.

4.2 Bemerkung (i) i ist nicht eindeutig, da $(-i)^2 = i^2 = -1$.

(ii) Wir können die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ „einbetten“. Sei $a \in \mathbb{R}$, dann ist $z = a + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$. Wir schreiben deswegen auch einfach a statt $a + i \cdot 0$.

4.3 Rechenregeln (i) Addition: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) \cdot i$

(ii) Subtraktion: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d) \cdot i$

(iii) Multiplikation: $(a + bi) \cdot (c + di) (= a \cdot c + a \cdot di + b \cdot ci - b \cdot d) \neq$

$$= (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$$

(iv) Division: $\frac{a + bi}{c + di} (= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$

4.4 Beispiel (i) $(4 + 7i) + (-3 + 5i) = -1 + 12i$

(ii) $(9 - i) - (18 + 16i) = -9 - 17i$

(iii) $(2 - 15i) \cdot (3 + 4i) = (6 + 60) + i(8 - 45) = 66 - 37i$

(iv) $\frac{2 - i}{-1 + 3i} = \left(\frac{2 - i}{-1 + 3i} \right) \cdot \left(\frac{-1 - 3i}{-1 - 3i} \right) = \frac{-2 - 6i + i - 3}{1 + 9} = \frac{-5 - 5i}{10} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

4.5 Definition. Ist $z = a + bi$ eine komplexe Zahl, so heißt

(i) $a = \operatorname{Re}(z)$ der Realteil von z

(ii) $b = \operatorname{Im}(z)$ der Imaginärteil von z

(iii) $\bar{z} = a - bi$ das komplex konjugierte von z

(iv) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ der Betrag von z .

4.6 Beispiel (i) $z = 1 - 4i$; $\operatorname{Re}(z) = 1$, $\operatorname{Im}(z) = -4$, $\bar{z} = 1 + 4i$, $|z| = \sqrt{17}$

(ii) $z = -3$; $\operatorname{Re}(z) = -3$, $\operatorname{Im}(z) = 0$, $\bar{z} = -3$, $|z| = 3$

(ii) $z=i$: $\operatorname{Re}(z)=0$, $\operatorname{Im}(z)=1$, $\bar{z}=-i$, $|z|=1$

4.7 Rechenregeln. Sind $z=a+bi$, $w=c+di$ komplexe Zahlen, so gilt:

(i) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ und $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

(ii) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

(iii) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, falls $z \neq 0$

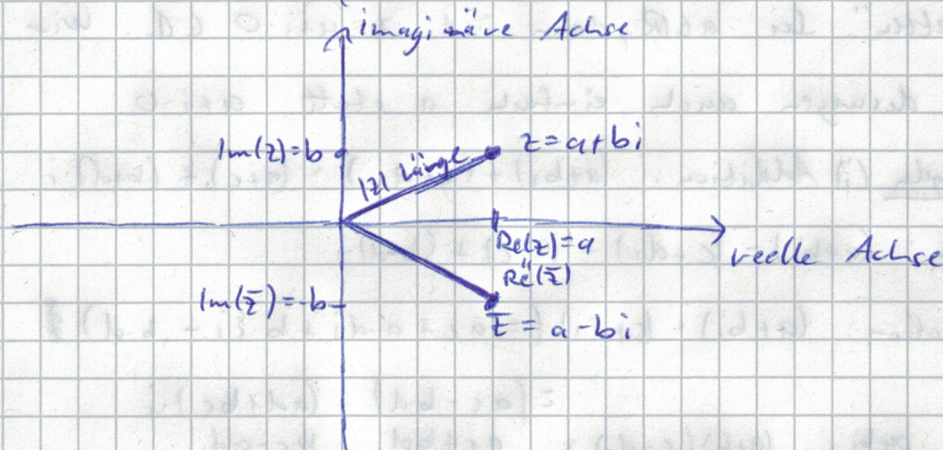
(iv) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(v) $|z+w| \leq |z| + |w|$

(vi) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\overline{\bar{z}} = z$

4.8 Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußebene

Ist $z=a+bi$ eine komplexe Zahl, so kann man diese auch als Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ im Koordinatensystem darstellen

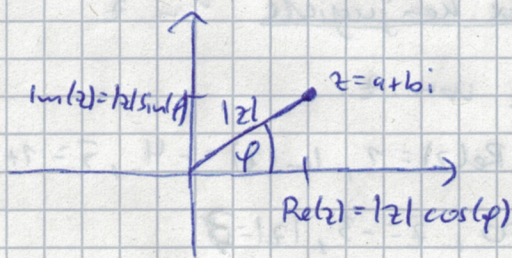


Real- und Imaginärteil von z entsprechen hierbei den Koordinaten des Vektors, der $|z|$ der Länge des Vektors. Das komplex konjugierte $\bar{z}$ von z entspricht dem an der reellen Achse gespiegelten Vektor.

4.9 Polardarstellung komplexer Zahlen. In obiger Darstellung

ist der Vektor eindeutig durch seine Länge $|z|$ und den Winkel („das Argument von z “) bestimmt (falls $z \neq 0$).

z liegt dann in Polarkoordinaten vor.



Man kann z also schreiben als

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) = |z| \cos(\varphi) + i |z| \sin(\varphi) \\ = |z| (\sin(\varphi) + i \cos(\varphi)), \quad \underline{\varphi \in [0; 2\pi)}!$$

die Polardarstellung von z .

Man kann φ durch $\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ und $\sin(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$ bestimmen. In Polarkoordinaten lässt sich einfacher multiplizieren und dividieren.

4.10 Satz (Eulersche Formel). Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = e^{i\varphi} \quad (e^z e^w = e^{z+w}, \quad e^{a+ib} = e^a e^{ib})$$

Damit gilt weiterhin $|e^{i\varphi}| = 1$.

Damit lässt sich multiplizieren und dividieren auf addieren und subtrahieren zurückführen.

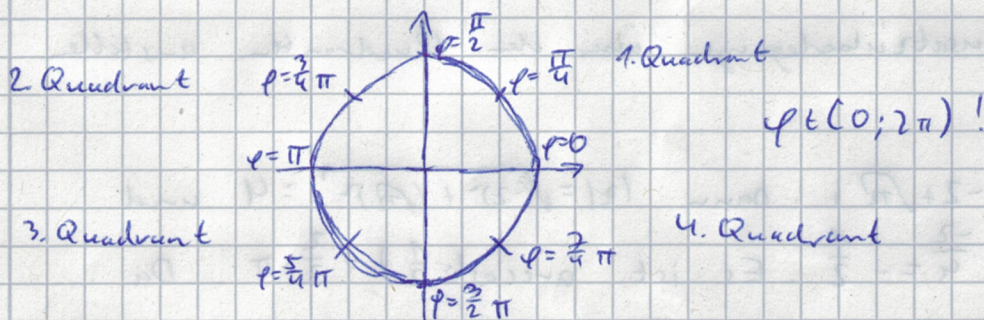
4.11 Satz. Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z = |z| e^{i\varphi}$ und $w = |w| e^{i\psi}$ ($\varphi, \psi \in \mathbb{R}$). Dann gilt:

$$(i) \quad z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot e^{i(\varphi+\psi)} = |z| \cdot |w| (\cos(\varphi+\psi) + i \sin(\varphi+\psi))$$

$$(ii) \quad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\varphi-\psi)} = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\varphi-\psi) + i \sin(\varphi-\psi)), \text{ falls } w \neq 0$$

Das Multiplizieren entspricht also dem Multiplizieren der Beträge und dem Addieren der Winkel; das Dividieren entspricht dem Dividieren der Beträge und der Subtraktion der Winkel.

4.12 Bemerkung. Wir schreiben den Winkel immer im Bogenmaß.



$$\pi \hat{=} 180^\circ, \quad 1^\circ \hat{=} \frac{\pi}{180}$$

4.13 Beispiel. (i) Die Zahl $z = 1 + i$ entspricht $z = \sqrt{2} (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$,

da $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und $\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

$$(i) z = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i \frac{\pi}{2}}$$

$$(ii) z = -2 + 2i = \sqrt{8} \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \right) = \sqrt{8} e^{i \frac{3}{4}\pi}$$

$$(iv) z = 1 + i = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}, w = -2 + 2i = \sqrt{8} e^{i \frac{3}{4}\pi}$$

$$z \cdot w = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{8} e^{i \frac{3}{4}\pi} = \sqrt{16} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi)} = 4 e^{i\pi} = -4$$

4.14 Erinnerung. Es gilt:

$$\sin(0) = 0, \cos(0) = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sin(\pi) = 0, \cos(\pi) = -1$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1, \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$$

2π -periodisch | $\sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi), \cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi)$.

4.15 Beispiel (Fortsetzung von 4.13). (i) $z = 1 + i, w = i$

$$\frac{z}{w} = \frac{(i) \frac{\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}}{e^{i \frac{\pi}{2}}}}{e^{i \frac{\pi}{2}}} = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

Da $\sin$ und $\cos$ 2π -periodisch sind, gilt dies auch für

$e^{i\cdot}$, d.h. für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^{i(\varphi + 2\pi)} = e^{i\varphi}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{z}{w} = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i(-\frac{\pi}{4} + 2\pi)} = \sqrt{2} e^{i \frac{7}{4}\pi}$$

(ii) Um allgemein den Winkel φ aus der Formel $\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$

zu bestimmen, benutzt man den Arcuscosinus. Der

Arcuscosinus liefert allerdings nur Werte in $[0; \pi]$ inner-

halb man Zusatzüberlegungen über den Quadranten anstellen

muss.

1. Beispiel: $z = -2 + \sqrt{3}i$. Dann $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = 4$ und

$$\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}. \text{ Es ist } \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi. \text{ Da}$$

z im 2. Quadranten liegt ($\operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) > 0$) und

$\varphi = \frac{2}{3}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, ist

$$z = 4 \left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right) = 4 e^{i \frac{2}{3}\pi}$$

2. Beispiel: $z = -2 - \sqrt{12}i \Rightarrow |z| = 4, \cos(\varphi) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2}{3}\pi$

Aber z liegt im 3. Quadranten, also

$$\varphi = 2\pi - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$$

4.76 Satz: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z = |z|e^{i\varphi}$ ($\varphi \in [0; 2\pi)$). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= |z|e^{-i\varphi} = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = |z|(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi)) \\ &= |z|e^{i(2\pi - \varphi)} = |z|(\cos(2\pi - \varphi) + i\sin(2\pi - \varphi))\end{aligned}$$

4.77 Beispiel: $z = -2 + \sqrt{12}i = 4e^{i\frac{2}{3}\pi}$

$$\Rightarrow \bar{z} = 4e^{i\frac{4}{3}\pi} = 4(\cos(\frac{4}{3}\pi) + i\sin(\frac{4}{3}\pi))$$

4.78 Quadratische Gleichungen: In $\mathbb{C}$ ist jede quadratische Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ lösbar (Dies gilt nicht in $\mathbb{R}$, betrachte $x^2 + 1 = 0$)

Lösungsverfahren: $az^2 + bz + c = 0, a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$

(1) Dividiere durch a : $z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$

(2) Quadratische Ergänzung: $(z + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$

(3) 1. Fall: $-\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 = 0$: $z = -\frac{b}{2a}$ einzige Lösung (doppelt)

2. Fall: $-\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 \neq 0$:

Schreibe diesen Term in Polarkoordinaten, d.h.

$$-\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 = re^{i\varphi} = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Dann sind

$$z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} - \frac{b}{2a} = \sqrt{r}(\cos(\frac{\varphi}{2}) + i\sin(\frac{\varphi}{2})) - \frac{b}{2a}$$

$$z_2 = \sqrt{r}e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi)} - \frac{b}{2a} = \sqrt{r}(\cos(\frac{\varphi}{2} + \pi) + i\sin(\frac{\varphi}{2} + \pi)) - \frac{b}{2a}$$

die Lösungen der Gleichung

4.79 Beispiel: (i) $z^2 + 2z + (3 - \sqrt{12}i) = 0$ ($a=1, b=2, c=3 - \sqrt{12}i$)

(1) ✓

(2) $(z + \frac{2}{2 \cdot 1})^2 = (z+1)^2 = -\frac{3 - \sqrt{12}i}{1} + (\frac{2}{2 \cdot 1})^2 = -2 + \sqrt{12}i \neq 0$

(3) $-2 + \sqrt{12}i = 4e^{i\frac{2}{3}\pi} = 4(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{2}{3}\pi))$

Lösungen: $z_1 = 2e^{i\frac{1}{3}\pi} - 1 = 2(\cos(\frac{1}{3}\pi) + i\sin(\frac{1}{3}\pi)) - 1$

$z_2 = 2e^{i\frac{4}{3}\pi} - 1 = 2(\cos(\frac{4}{3}\pi) + i\sin(\frac{4}{3}\pi)) - 1$

(ii) $z^2 + 2z + 5 = 0$ ($a=1, b=2, c=5$)

(1) ✓

(2) $(z+1)^2 = 5 + 1 = -4 \neq 0$

(3) $-4 = 4e^{i\pi}$

Lösungen: $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} - 1 = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) - 1 = -1 + 2i$

$z_2 = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} - 1 = 2(\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi)) - 1 = -1 - 2i$

(iii) Komplexe Eigenwerte: Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Das charakt. Polynom ist

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda E_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)^2 + 4$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

Die Nullstellen sind (vgl. (ii)) $\lambda_1 = -1 + 2i$ und $\lambda_2 = -1 - 2i$,

also hat die Matrix zwei komplexe EW'e (Die zugehörige EV'en haben komplexe Zahlen als Einträge).

4.20 Bemerkung. Wir können die ganze Theorie, die wir in Kapitel 7-3 erarbeitet haben, auch für den Fall machen, dass wir in der Matrix komplexe Zahlen als Einträge haben, z.B.

$$A = \begin{pmatrix} -i & 8+i \\ 7 & 4+7bi \end{pmatrix}$$