

V Folgen und Reihen

5.1 Motivation/Beispiel

Die Messdaten für

$N(t)$ = Anzahl von Bakterien einer best. Art an einem best. Ort in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen)

ergeben

t	0	1	2	3	4	...	10	...	100	101	102	103	...	...	1000	1001	1002	1003	...	10.000	10.001	...
$N(t)$	10	23	75	198	552	...	171.029	...	764.998	765.002	765.000	764.999	...	...	764.999	765.000	764.999	764.999	...	765.000	765.000	...

Man könnte vermuten: Ist t groß, so nähert sich $N(t)$ an 765.000

Problematisch hier: Was soll das bei den gemessenen ganzen Zahlen überhaupt bedeuten?

Für diese Messwerte aus ganzen Zahlen kann man dem Konzept zwar einen Sinn verleihen, aber Zahlen, die einen weitabliegt. (warum z.B. nicht "nähert sich 765.000"?)

Aber: Anstatt 10.000 oder mehr Messwerte zu verwenden, wendet man oft sowieso auf (theoretisch gewonnene und praktisch bestätigte) Modelle aus, die die Situation näherungsweise beschreiben und mathematisch leichter zu behandeln sind.

Hier wäre eine Möglichkeit

$$N(t) = \frac{10 \cdot 765.000 \cdot e^t}{765.000 + 10(e^t - 1)}$$

Man erhält:

t	0	1	2	...	10	...	100	...	1000	765.000
$N(t)$	10	23,18	73,88	...	171.029,27	...	764.999,99...978	...	so nah an 765, dass Wolframalpha keinen Unterschied feststellt	

Hier kann man schon berechtigter und mathematisch sauber sagen, dass in diesem

Modell $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 765.000$ gilt.

Wir werden im Folgenden die mathematischen Grundlagen für derartige Bezeichnungen ("Konvergenz", "Grenzwert") legen.

5.2 Definition

Eine Folge ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $a_n := a(n)$.

Außerdem schreiben wir $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für die Folge a .

5.3 Beispiel:

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$

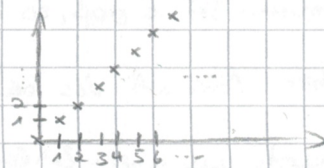
c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c)_{n \in \mathbb{N}} = (c, c, c, c, \dots)$ für ein $c \in \mathbb{R}$, "konstante Folge"

d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

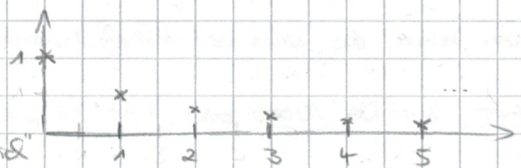
also $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Untersucht man diese Folgen, so merkt man, dass sich manche einem bestimmten Wert annähern, andere nicht.



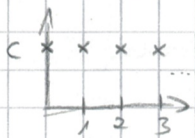
a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird immer größer

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ nähert sich der Null.



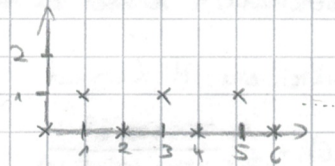
c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c)_{n \in \mathbb{N}}$ ist immer c , "nähert sich"

also der Zahl $c \in \mathbb{R}$



d) Die Folge aus d) pendelt zwischen 0 und 1

hin und her, nähert sich also keinem best. Wert.



Das motiviert die folgende Definition:

5.4 Definition

a) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, falls es für alle Zahlen $\varepsilon > 0$ einen Index $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Kurz: $\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon$

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nähert sich also dem Wert a beliebig ($\forall \varepsilon > 0$) nah

("Betrag der Differenz misst Nähe zweier Zahlen"), wenn nur das Folgenglied genügend großen Index ("ab einem best. $N(\varepsilon)$ ") hat.

Die Zahl a heißt dann der Grenzwert der Folge und wir schreiben dafür auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ oder } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a.$$

Eine Folge, die nicht konvergiert (d.h. gegen kein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert), nennt man divergent.

b) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (uneigentlich) gegen unendlich, falls es zu jeder Zahl $M \in \mathbb{N}$ einen Index $N = N(M) \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $a_n > M$ für alle $n \geq N$ gilt. Entsprechend konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (uneigentlich) gegen minus unendlich, falls es zu jeder Zahl $M \in \mathbb{N}$ einen Index $N = N(M) \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $a_n < -M$ für alle $n \geq N$ gilt. Wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ und sagen auch, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt divergiert.

5.5 Beispiel

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ist $M \in \mathbb{N}$, so gilt für $N = M+1$, dass

$$a_n = n \geq N = M+1 > M$$

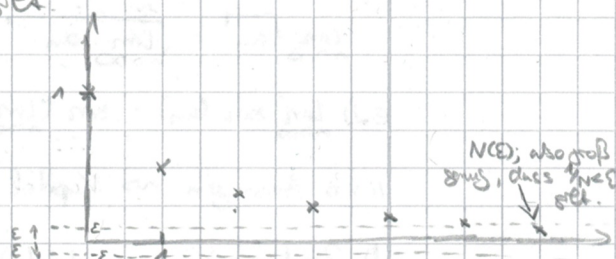
für alle $n \geq N$ gilt. Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, die Folge konvergiert uneigentlich gg. unendlich.

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ gilt.

Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

Ist dann $n \geq N$, so gilt

$$|a_n - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$



Dies zeigt, dass tatsächlich $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ gilt.

c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c)_{n \in \mathbb{N}}$. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, denn ist $\varepsilon > 0$ beliebig und $N=0$, so gilt

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

d) Die Folge aus Bsp. 5.3 d) divergiert. Zum Beweis nehmen wir an, es gäbe ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ (und führen das zu einem Widerspruch).

Zu $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ sei dazu $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt.

Seien $n_1 \geq N$ gerade und $n_2 \geq N$ ungerade. Es folgt

$$|a| = |a_{n_1} - a| < \frac{1}{2} \quad \text{ sowie } |1 - a| = |a_{n_2} - a| < \frac{1}{2}.$$

Angenommen, es wäre $a \geq 0$. Dann würde daraus $a < \frac{1}{2}$ und damit

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} < 1 - a \leq |1 - a| < \frac{1}{2}$$

folgen, ein Widerspruch. Für $a \leq 0$ folgt andererseits

$$1 \leq 1 - a \leq |1 - a| < \frac{1}{2},$$

auch ein Widerspruch. Damit kann es ein solches $a \in \mathbb{R}$ nicht geben.

