

5.6 Satz (Rechenregeln für den Limes)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gelten:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda \cdot a$$

Insbesondere aus a) & b): $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) = a + (-1) \cdot b = a - b.$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = a \cdot b$

d) $\text{GGL } b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

e) Falls $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (und $a \geq 0$) gilt, so gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

$$e.2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(a_n) = \sin(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$$

u.v.ä Aussagen $\leadsto$ Kapitel VI

4) Sind $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen, so gilt weiter:

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n) = \infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n) = -\infty$

Achtung " $+\infty + (-\infty) = \text{ irgendwas}$ " gibt es A nicht!

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n d_n) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } d > 0 \\ -\infty, & \text{falls } d < 0 \end{cases}$$

↳ analog für $C_n \rightarrow \infty$

↓ 3) ($\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$)
und $c_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} = 0$

g) $\{a_n\}$ einen eine weitere Folge und $N \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{a}_n = a_n$ für alle $n \geq N$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n = \alpha$.

5.7 Seite (Eindeutigkeit des Gw)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$. Dann gilt $a = b$.

5.9 Beispiel

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{n+6}{2^{n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Also: $a_0 = 3, a_1 = \frac{7}{4}, a_2 = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}, a_3 = \frac{9}{8}, a_4 = 1, \dots, a_9 = \frac{105}{200} = \frac{21}{40},$
 $\dots, a_{1000} = \frac{1006}{2^{1001}} = 0,502497\dots$

Wir vermuten: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$. Und tatsächlich gilt für $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{n+6}{2(n+1)} = \frac{n+6}{2n+2} = \frac{n(1+\frac{6}{n})}{n(2+\frac{2}{n})} = \frac{1+\frac{6}{n}}{2+\frac{2}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\substack{6/n \rightarrow 0 \\ 2/n \rightarrow 0}} \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Grenzwert: $6 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 6$ nach 55c), $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ nach 55b) $\Rightarrow \frac{6}{n} = 6 \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 6 \cdot 0 = 0$ (4)

$$2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \text{ nach (5.5c)}, \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ nach (5.5b)} \xRightarrow{\text{S.6c)}} \frac{2}{n} = 2 \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \cdot 0 = 0 \quad (++)$$

$$1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ nach (5.5c)}, \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ nach (++)} \xRightarrow{\text{S.6c)}} 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + 0 = 1 \quad (+++)$$

$$2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \quad " \quad , \quad \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad " \quad (++) \xRightarrow{\text{S.6c)}} 2 + \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 + 0 = 2 \quad (++++)$$

$$\frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 \neq 0}{2} \text{ nach (++)}, \frac{2 + \frac{2}{n}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \text{ nach (++++)} \xRightarrow{\text{S.6d)}} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

$$b) (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{-n^3 + 3n - 5}{2n^2 + 3} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Dann gilt für $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{n^3}{n^2} \cdot \frac{-1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^3}}{2 + \frac{3}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$

$$c) (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((n+1) - (n))_{n \in \mathbb{N}}$$

Dann gilt für $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{(n+1) - (n)}{(n+1) + (n)} = \frac{n+1-n}{(n+1)+n} = \frac{1}{(n+1)+n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

5.10 Lemma (Quotientenlemma):

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen und $x \in \mathbb{R}$ so, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$ gelten.

Dann sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$a_n \leq x_n \leq b_n$$

für alle $n \geq N$ gilt. Dann konvergiert auch $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x .

5.11 Beispiel:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{\sin(n)}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Wegen $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt auch

$$-\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sin(n)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n+1} = 0$ und S.9 folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n+1} = 0$.

5.12 Beispiel

Manche Zusammenhänge werden durch Folgen beschrieben, deren Glieder sich aus den vorherigen berechnen.

Männliche Bienen (Drohnen) schlüpfen aus unbefruchteten Eiern, während aus

befruchteten Eiern Weibchen schlüpfen.

Der Stammbaum einer Dohle ist also:

Für die Anzahl Vorfahren $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einer Dohle in der n -ten Generation ergibt sich:



Generation	weibl. Vorfahren	männl. Vorfahren	a_n
1	1	0	1
2	1	1	2
3	2	1	3
4	3	2	5

Man sieht: " $a_0 = 1$ ", $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$

Diese Folge nennt man auch Fibonacci-Zahlen.

Allgemein wird das Konzept durch rekursiv definierte Folgen beschrieben:

5.13 Definition:

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt rekursiv definiert, falls es $k \in \mathbb{N}$ und $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

für alle $n \geq k$ gilt.

In vielen Fällen kann man auch wie gewohnt eine "geschlossene Formel" (d.h. a_n nur abhängig von n) finden, wofür es sogar konkrete Verfahren gibt.

Für die Fibonacci-Zahlen von oben gilt etwa

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Notation
Für $N, n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N$ und $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ sein
 $\sum_{k=1}^N a_k = a_1 + \dots + a_N$
Ist $n > N$, so setzen
wir $\sum_{k=1}^n a_k = 0$.

Eine besondere Form der Konvergenz von Folgen ist die Konvergenz von Reihen.

5.14 Definition

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, so ist

$$S_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

die n -te Partialsumme. Wir nennen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Reihe. Konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

gegen ein $s \in \mathbb{R}$, so schreibt man auch $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

5.15 Beispiel

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gilt $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$S_n \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \text{ gilt } S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$ aus Lemma 5.8.

Also konv. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.

b) Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots$$

s_n wird also größer als jedes Vielfache von $\frac{1}{2}$, also bel. groß, wenn man n nur groß genug wählt.

c) Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, denn

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

5.16 Satz (Rechenregeln):

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gelten

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Achtung: Für Produkte und Quotienten gelten entsprechende Regeln nicht!

(Nehmen für endl. Summen $\frac{2+3}{1+7} \neq \frac{2}{1} + \frac{3}{7}$)

5.17 Bemerkung:

Oft interessiert uns lediglich, ob eine Reihe konvergiert und nicht gegen was!

Dann ist ein endl. Anfangsteil irrelevant, d.h. wir können statt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{genauso} \quad \sum_{k=1000}^{\infty} a_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=N}^{\infty} a_k \quad \text{für ein } N \in \mathbb{N} \text{ betrachten.}$$

Wir wollen nun eine Kriterien für die Konvergenz einer Reihe betrachten.

5.18 Satz (Nullkriterium)

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe, so ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Intuition: wenn nicht, so addieren wir unendl. viele Folgenglieder, die größer als eine pos. Zahl c sind, also ist unsere Summe größer als $\underbrace{c+c+c+\dots}_{\text{unendl. oft}} \uparrow$

5.19 Beispiel:

a) Laut Bsp. 5.9a) gilt $\frac{n+6}{2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq 0$. Damit divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+6}{2(n+1)}$.

b) Bsp. 5.15 b) zeigt, dass die Umkehrung von 5.18 falsch ist.

5.20 Definition:

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

5.21 Bemerkung:

Absolut konvergente Reihen sind immer konvergent. Die Umkehrung gilt nicht (Bsp. s. später).

5.22 Satz (Majoranten-/Minorantenkriterium)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen.

a) Gibt es $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \geq N$ gilt und ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konv., so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent (also auch konvergent).

b) Gibt es $N \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n \geq b_n \geq 0$ für alle $n \geq N$ gilt und ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

5.23 Beispiel

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, denn $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k \cdot \frac{k+1}{2}} = \frac{2}{k(k+1)}$ für alle $k \geq 1$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ konv.

laut Bsp. S. 15 c) und Satz S. 16.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ oder allg. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ mit $\alpha \geq 2$ konv. wegen $\frac{1}{k^{\alpha}} = \frac{1}{k^2}$ für alle $k \geq 1$.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ konv. wegen $\frac{1}{k^{\alpha}} \geq \frac{1}{k}$ für alle $k \geq 1$ und Bsp. S. 15 b).

5.24 Satz (Leibnizkriterium)

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine mon. fallende Nullfolge, d.h. gilt

i) $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ (aber nicht unbedingt absolut).

5.25 Beispiel:

Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ konvergiert, denn $(\frac{1}{k})_{k \geq 1}$ ist eine mon. fallende Nullfolge. Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \frac{1}{k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konv. diese Reihe aber nicht absolut (vgl. Bsp. S. 15 b)).

5.26 Satz (Quotientenkriterium)

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, so

konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Anmerkung: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ oder $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ reicht nicht.

5.27. Beispiel:

a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^5}{3^k}$ konvergiert wegen

$$\left| \frac{(k+1)^5}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{k^5} \right| = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^5 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} (1+0)^5 = \frac{1}{3} < 1$$

b) Für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{n+2} \cdot \frac{n!}{1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+1}{n+2} < 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ aber } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{ konv. nicht.}$$

5.28 Lemma / Def.

Die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ existieren und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Wir berechnen $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.