

VI Funktionen und Stetigkeit

~~Bevor~~ ~~ist~~ Bevor wir zum Begriff Stetigkeit kommen (d.h. "kleine Änderungen der übergebenen Werte bewirken nur kleine Änderung der davon abhängigen Werte"), wollen wir zunächst einige ~~anfängliche~~ grundlegende Funktionen definieren.

6.1 Definition

a) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ fest, so heißt

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Polynomfunktion. p heißt vom Grad n , falls $a_n \neq 0$ gilt.

b) Sind $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ und $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$ Polynomfunktionen, so heißt

$$f: \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; q(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

gebrochen-rationale Funktion.

6.2 Beispiel:

a) $p_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p_1(x) = 2x$, $p_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p_2(x) = 5x^2 - 2$, $p_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p_3(x) = x^9 + 0 \cdot x^{10} + 1$

sind Polynome vom Grad 1, 2 bzw. 9.

b) $f_1: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$,

$f_2: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x-3}{(x-1)^2}$ und

$f_3: \mathbb{R} \setminus \{\pm \sqrt{2}\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x}{5x^2 - 2}$

sind gebrochen-rationale Funktionen.

6.3 Definition / Satz:

Nach Aufgabe 5 viii) von Blatt 5 konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Man nennt

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exponentialfunktion. Man kann die folgenden Eigenschaften zeigen:

(1) $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(tx) = \exp(x)^t \quad \forall t \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$.

(2) $\exp(0) = 1$ und $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(3) $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

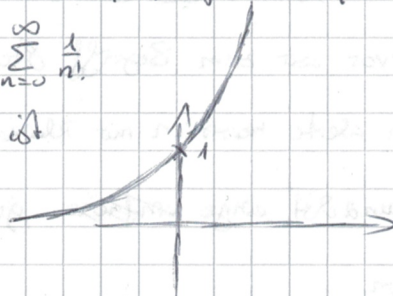
(4) $\exp$ ist streng mon. wachsend, d.h. aus $x < y$ folgt $\exp(x) < \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

muss man zeigen (auch die Existenz)!

(5) Mit $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2,71\dots$ gilt $e^q = \exp(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

Insbesondere gilt $e = e^1 = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Der Graph der Exponentialfunktion ist



6.4 Definition / Satz

Es gilt $\exp(\mathbb{R}) = \{ \exp(x); x \in \mathbb{R} \} =]0, \infty[$.

Es gibt eine Funktion $\log:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

(1) ~~$\log(\exp(x)) = x$~~

(1) $\log(\exp(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ und $\exp(\log(x)) = x \quad \forall x \in]0, \infty[$.

(2) $\log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad \forall x, y \in]0, \infty[$, $\log(x^r) = r \log(x) \quad \forall r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$.

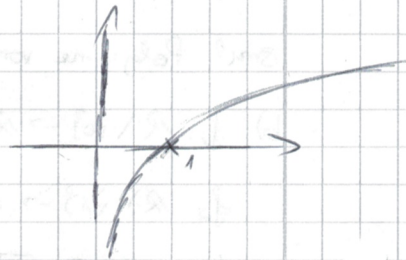
(denn $\exp(\log(x) + \log(y)) = \exp(\log(x)) \cdot \exp(\log(y)) = xy \quad \forall x, y \in]0, \infty[$,
also

$$\log(x) + \log(y) = \log(\exp(\log(x) + \log(y))) = \log(xy) \quad \forall x, y \in]0, \infty[$$

(3) $\log(1) = \log(e^0) = 0$ und $\log(e) = \log(e^1) = 1$

(4) $\log$ ist streng monoton wachsend.

Wir nennen $\log$ die Logarithmusfunktion. Der Graph ist



6.5 Definition:

Sind A, B Mengen und $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ Funktionen

mit $f(g(x)) = x$ für alle $x \in B$ und $g(f(x)) = x$ für alle $x \in A$, so heißt g

Umkehrfunktion von f (und umgekehrt). Wir schreiben auch $g = f^{-1}$.

6.6. Bemerkung:

Insbesondere gilt laut 6.4, (1), dass $\log = \exp^{-1}$ ist.

(Nicht zu verwechseln mit der Funktion $1/\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/\exp(x)$)

6.7 Definition / Satz:

Ist $a > 0$, so heißt $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a^x := \exp(x \cdot \log a)$ Exponentialfunktion

zum Basis a . Es gilt: $a^0 = 1, a^1 = a, e^x = \exp(x), 1^x = 1, a^{x+y} = a^x a^y, (a^x)^y = a^{xy}$

für alle $a > 0, x, y \in \mathbb{R}$.

Für $a \neq 1, a > 0$ hat f_a eine Umkehrfunktion, die wir mit $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$

bestimmen. Dann gilt

$$\log_a(1) = 0, \log_a(a) = 1, \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \log_a(x^{-1}) = -\log_a(x)$$

für alle $a \in]0, \infty[\setminus \{1\}$, $x, y \in]0, \infty[$.

6.8 Bemerkung / Beispiel:

Die Exponentialfunktion beschreibt sehr oft Wachstum bzw. Zerfall von Sachen:

Nach dem Tod eines Lebewesens zerfällt der radioaktive Kohlenstoffisotop C_{14} mit einer Halbwertszeit von 5370 Jahren. Wie alt ist eine Mumie mit nur 35% ~~gesundenem~~ C_{14} -Gehalt?

Der C_{14} -Gehalt nach t Jahren ist $C(t) = C_0 \cdot a^t$. Was ist a ? ↑ Anteil lebendes Mensch

Wir wissen: $C(t + 5370) = \frac{1}{2} C(t)$ ($t \in]0, \infty[$), also

$$C_0 \cdot a^{t+5370} = C_0 \cdot a^t \cdot a^{5370} = C(t+5370) = \frac{1}{2} C(t) = \frac{1}{2} C_0 \cdot a^t$$

Es folgt (mit $a^t > 0$), dass $a^{5370} = \frac{1}{2}$ gilt, also ~~es~~

$$5370 \log(a) = \log(a^{5370}) = \log\left(\frac{1}{2}\right) \text{ und damit}$$

$$a = \exp(\log(a)) = \exp\left(\frac{\log(1/2)}{5370}\right)$$

Suche nun $t \in]0, \infty[$ mit $\frac{C(t)}{C_0} = 0,35$, also $a^t = 0,35$.

$$\text{Es folgt } t \cdot \log(a) = \log(a^t) = \log(0,35) \text{ und daher } t = \frac{\log(0,35)}{\log(a)} = 5370 \cdot \frac{\log(0,35)}{\log(1/2)}$$

Die Mumie ist also etwa 8133 Jahre alt.

$$\approx 8133$$

6.9 Definition

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$ oder $a \in \{\pm\infty\}$, so, dass } =: a ist approximierbar in D hat
~~Für~~ es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{a\}$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Dann schreiben wir $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ für $c \in \mathbb{R}$ oder $c \in \{\pm\infty\}$, falls für jede solche Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ schon $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ gilt.

6.10 Beispiel:

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$

1) $a = \infty$: Es ist z.B. $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Für jede Folge $(k_n)_n$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ gilt laut 5.6 f3) $f(k_n) = \frac{1}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Es folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

2) $a = 0$. $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ und $(-\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ sind Folgen in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n}$.

Es gilt aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq -\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} -n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(-\frac{1}{n}).$$

der GW $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ existiert also nicht.

b) $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ existiert nicht, denn die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2\pi n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2\pi n + \frac{\pi}{2})_{n \in \mathbb{N}}$

sind in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi n = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n + \frac{\pi}{2})$, aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}).$$

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{ \pm 1 \} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1}$. Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{ \pm 1 \}$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$

gilt $f(x_n) = \frac{(x_n+1)(x_n-4)}{(x_n+1)(x_n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$. Es folgt $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1} = \frac{5}{2}$.

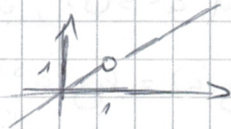
Umgekehrt gilt $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existiert nicht. (siehe z.B. $(1+\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ und $(1-\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ in $\frac{x-4}{x-1}$ und verwende S.6)

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} x^2, & x = 1 \\ x, & \text{sonst} \end{cases}$

Es gilt für $(x_n)_n$ in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \neq 1^2 = f(1).$$

Also gilt dann: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1)$.



e) Für $\log:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ macht $\lim_{x \rightarrow -4} \log(x)$ keinen Sinn, $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty$

hingegen schon.

Bemerkung:
Man kann zeigen, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty$$

$$\text{gelten.}$$

6.11 Satz (Rechenregeln)

Für Funktionen $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$), $a \in \mathbb{R}$ so, dass $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \mathbb{R}$

existieren, gelten analoge Regeln wie in S.6, etwa

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{falls } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0, g(x) \neq 0 \forall x \in D.$$

Für $f: D \rightarrow \mathbb{R}, g: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq \tilde{D}$ gilt außerdem:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c.$$

6.12 Beispiel:

Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2+x}$ gilt wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2+x) = -\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \text{ schon } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

6.13 Definition:

Seien $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in D$. Dann heißt f stetig in a , falls für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ schon $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$ gilt.

Ist f in allen $a \in D$ stetig, so heißt f stetig.

6.14 Satz

a) Alle gebrochen-rationalen Funktionen (insbesondere alle Polynomfunktionen) sind stetig.

b) Für $a \in \mathbb{R}$ ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

b) Für $a \in \mathbb{R}$ ist $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^a$ stetig.

c) Für $a > 0$ ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ stetig.

d) $\log:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $\exp, \sin, \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig.

e) Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten sowie Hintereinanderausführung (wenn möglich) stet. Funktionen sind stetig.

z.B. ist $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 3\} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{\exp(\frac{\sin x}{x-3}) \cdot 4x^3 - 3}{2^x + \sqrt{x} \cdot \cos(\frac{3}{x^2})}$ stetig.

6.15 Definition:

Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in D$ so, dass es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ gibt. Gilt für alle derartigen Folgen schon $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ oder $c \in \{\pm \infty\}$, so schreiben wir $\lim_{x \nearrow a} f(x) = c$ ("linksseitiger Grenzwert").

Analog definieren wir $\lim_{x \searrow a} f(x) = c$ (mit " $>$ " statt " $<$ ").

6.16 Satz:

Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \nearrow a} f(x) = f(a) = \lim_{x \searrow a} f(x)$, so ist f stetig in a .

6.17 Beispiel:

Sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Es gilt $\lim_{x \nearrow 0} h(x) = -1, \lim_{x \searrow 0} h(x) = 1$.

Insbesondere ist h nicht stetig in 0 .

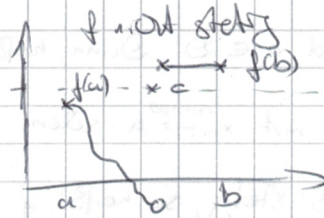
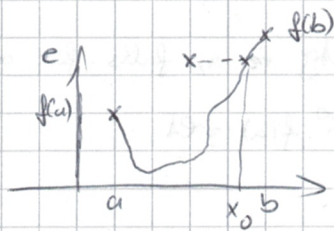


6.18 Satz:

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq c \leq f(b)$ oder $f(a) \geq c \geq f(b)$,

so gibt es $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = c$.

Die Funktion nimmt also alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



wird nie angenommen

6.19 Beispiel:

Sei $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 5x^5 - 3x^4 + x - 1$.

Dann gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 \left(5 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5} \right) = \infty$ und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(5 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5} \right) = -\infty.$$

Also gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $p(a) < 0 < p(b)$.

Nach 6.10 gibt es $x_0 \in [a, b]$ mit $p(x_0) = 0$.

Das Beispiel gilt für alle Polynome mit ungeradem Grad ~~und positiv~~