UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
M. Sc. Sebastian Langendörfer
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2016/17

Blatt 2 Abgabetermin: 2.12.2016, 12 Uhr

Aufgabe 1 (5+5 = 10 Punkte)**.** Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme, die durch die folgenden Matrizen gegeben sind in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$:

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right)$,

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & a(a+1) & 2a & 3a+1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$.

Aufgabe 2 (3+7 = 10 Punkte)**.** (a) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 & -5 \\ -9 & -10 & -1 & -9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 & -1 \\ 1 & 6 & 4 & 10 \\ -4 & -4 & 2 & -9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4},$$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 9 & -2 \\ 9 & -2 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & -5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}, \quad D = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -9 & -6 \\ 7 & -10 & -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}.$$

Welche der folgenden Additionen sind möglich: $A+B, A+C, A+D, B+C, B+D, C+D$? Bestimmen Sie gegebenenfalls das Ergebnis.

(b) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ -9 & -10 & -1 \\ -5 & -9 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2},$$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 9 \\ 9 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad D = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, zwei dieser Matrizen miteinander zu multiplizieren (beachten Sie, dass eine Matrix unter Umständen auch mit sich selbst multipliziert werden kann) und bestimmen Sie das Ergebnis dieser Multiplikation.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (3+3+2+2= 10 Punkte)**.** Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 (3+2 = 5 Punkte)**.** Betrachten Sie die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ sowie die zugehörigen Abbildungen

$$f_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

und

$$f_B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $A \cdot B$ und damit $(A \cdot B) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ist es möglich auch $B \cdot A$ zu berechnen?

(b) Bestimmen Sie $f_B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und damit $f_A\left(f_B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right)$.

Hinweis: *Die Beobachtung, die Sie nach Bearbeitung von Aufgabe 4 (a) und (b) hoffentlich gemacht haben, ist kein Zufall, sondern gilt ganz allgemein und ist die Hauptmotivation dafür, das Matrixprodukt mit der in der Vorlesung angegebenen, zunächst etwas unintuitiv wirkenden Formel zu berechnen.*

Aufgabe 5 (5 Punkte)**.** Betrachten Sie die beiden (2×2)-Matrizen $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie die zugehörigen Abbildungen

$$f_P \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } f_S \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Beschreiben Sie in Worten, wie die Abbildungen f_P und f_S geometrisch wirken. Berechnen Sie außerdem die Matrix $S \cdot S$ und beschreiben Sie die Wirkungsweise der zugehörigen Abbildung geometrisch.