UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
M. Sc. Sebastian Langendörfer
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2016/17

Blatt 3, Lösungen Abgabetermin: 16.12.2016, 12 Uhr

Aufgabe 1 (3+7=10 Punkte)

Bestimmen Sie zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jeweils die inverse Matrix mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Lösung. Wir führen den Gauß-Algorithmus durch um A^{-1} und B^{-1} zu erhalten:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II\to 3II-2I} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 3 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{I\to 13I+2I} \left(\begin{array}{cc|cc} 39 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 13 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[II\to\frac{1}{13}II]{I\to\frac{1}{39}I} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{array}\right)$$

sowie

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II\to II-I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{III\to 2III+II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[II\to II-III]{I\to 2I+III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 8 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{I\to I+4II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[III\to\frac{1}{2}III]{\substack{I\to\frac{1}{2}I \\ II\to\frac{-1}{2}II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right).$$

(bitte wenden)

Aufgabe 2 **(3+(2+5)=10 Punkte)**

(i) Entscheiden Sie mit Hilfe der Determinante für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & -1 & \alpha + 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

(ii) Seien

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 3 & \frac{3}{16} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes. (*Hinweis : Die Determinante einer* 1×1*-Matrix ist ihr Eintrag, d.h. für* $A = (a)$ *gilt* $\det(A) = a$.)

(b) Berechnen Sie die Determinante von B. Benutzen Sie den Laplace'schen Entwicklungssatz für 4×4- und 3×3-Matrizen.

Lösung. (i) Mit dem Laplace'schen Entwicklungsatz (Entwicklung nach der 1. Zeile) ergibt sich

$$\begin{aligned}\det(A_\alpha) &= (\alpha - 1)\det(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & 4 \end{pmatrix}) - (-1)\det(\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}) + (\alpha+1)\det(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}) \\ &= (\alpha - 1)(4 + 2\alpha) + (-4 + 4) + (\alpha + 1)(-\alpha - 2) \\ &= 2(\alpha - 1)(\alpha + 2) - (\alpha + 1)(\alpha + 2) \\ &= (\alpha + 2)(\alpha - 3).\end{aligned}$$

Damit ist die Matrix für alle $x \neq -2, 3$ invertierbar.

[Regel von Sarrus ist auch zulässig.]

(ii) (a) Entwicklung nach der 1. Spalte:

$$\det(\begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 3 & \frac{3}{16} \end{pmatrix}) = (-8)\det(\begin{pmatrix} \frac{3}{16} \end{pmatrix}) - 3\det((-1)) = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}.$$

(b) Entwicklung nach der 1. Spalten:

$$\det(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}) = 0 - 2\det(\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}) + (-1)\det(\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}) - 0.$$

Für die erste Determinante entwickeln wir nach der 2. Spalte:

$$\begin{aligned}\det(\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}) &= -(-2)\det(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}) + 0\det(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}) - 1\det(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}) \\ &= 2 \cdot 0 - (3 + 1) = -4.\end{aligned}$$

Für die zweite Determinante entwickeln wir nach der 1. Spalte:

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}) = 1\det(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}) - 4\det(\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}) + 1\det(\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix})$$

$$= (-6-1) - 4(-6+1) + (-2-2) = -7 + 20 - 4 = 9.$$

Also insgesamt

$$\det(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}) = (-2)\cdot(-4) - 9 = -1.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & -1 & -5 \\ -5 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir führen zunächst den Gauß-Algorithmus durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & -1 & -5 \\ -5 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{IV \to IV+3I \\ V \to V+5I}]{\substack{II \to II+I \\ III \to III+I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & 5 & -20 \\ 0 & -2 & 6 & 13 & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow[V \to 2V-II]{\substack{III \to 2III+II \\ IV \to IV-II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & 7 & -19 \\ 0 & 0 & 13 & 28 & -45 \end{pmatrix} \xrightarrow[V \to V+13III]{IV \to IV+9III} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 43 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 80 & -162 \end{pmatrix} \xrightarrow{V \to 43V-80IV}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 43 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1034 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} 1 \cdot (-4) \cdot (-1) \cdot 43 \cdot 1034 &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 43 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1034 \end{pmatrix}\right) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 43 \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & -1 & -5 \\ -5 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

woraus

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & -1 & -5 \\ -5 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right) = 1034$$

folgt.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(6+4=10 Punkte)**

Betrachtet werden die folgenden linearen Abbildungen

$$f_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

und

$$f_B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Geben Sie die Matrizen A und B an, mit denen sich diese Abbildungen beschreiben lassen. Sind die Matrizen A bzw. B invertierbar? Haben die entsprechenden homogenen LGS $Ax = 0$ bzw. $Bx = 0$ eine eindeutige Lösung?

(ii) Gegeben sind zusätzlich die Vektoren

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } d = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sind die Gleichungen $Ax = c$, $Ax = d$, $Bx = c$ und $Bx = d$ lösbar, und wenn ja, wie viele Lösungen besitzen sie?

(*Hinweis : Sie brauchen die Lösung(en) nicht in allen Fällen explizit zu berechnen.*)

Lösung. (i) Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Jeweils 0,5]

Die Matrix A ist invertierbar, da (Entwicklung nach der 1. Spalte)

$$\det(A) = 3\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) - 0 + 1\det(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = -3 + 1 = -2 \neq 0.$$

[1,5]

Die Matrix B hingegen nicht, da sich die 3. Zeile als Summe der 1. und der 2. Zeile schreiben lässt. [1,5] Damit hat das homogene LGS $Ax = 0$ nur die Lösung $x = 0$ [1] und das homogene LGS $Bx = 0$ unendlich viele Lösungen. [1]

(ii) Die Gleichungen $Ax = c$ und $Ax = d$ haben genau eine Lösung, da A nach (i) invertierbar ist. [1]

Für $Bx = c$ benutzen wir den Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to III - I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to III - II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Somit ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 + 2\lambda \\ 3 - 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(bitte wenden)

[Hier reicht es auch zu sagen, dass es unendlich viele Lösungen gibt.; 1,5]
Für $Bx = d$ benutzen wir den Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to III - I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to III - II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

Somit gibt es keine Lösung. [1,5]

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ws1617/mfb