UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
M. Sc. Sebastian Langendörfer
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2016/17

Blatt 5 Abgabetermin: 27.01.2017, 12 Uhr

Aufgabe 1 (2+4+3+2=11 Punkte)**.** Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gebenenfalls ihren Grenzwert.

(i) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{2n^3-n+7}{3n^3+7}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,

(ii) $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = \sqrt{9n^4+n+1} - 3n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,

(iii) $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n = \frac{(-1)^n \cdot 3 + \sin(n)}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,

(iv) $(d_n)_{n\geq 1}$ mit $d_n = \frac{-2n^4}{n^3-2n^2+2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Aufgabe 2 (2+1=3 Punkte)**.** Sei $q \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

für $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für $|q| < 1$ konvergiert und dass $\sum_{k=0}^{\infty} q_k = \frac{1}{1-q}$ gilt.

Aufgabe 3 ($2 \cdot 1{,}5 = 3$ Punkte)**.** Für eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $N \in \mathbb{N}$ sei

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k := (\sum_{k=N}^{n} a_k)_{n\geq N}.$$

(a) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$.

(b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (1+3+3=7 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Reihenwerte der folgenden Reihen:

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+1}}$,

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$,

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(5^{-k} \frac{3^k+1+5^{-k}}{5}\right)$.

Aufgabe 5 ($8 \cdot 2$ =16 Punkte)**.** Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche divergieren? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils.

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k^4+8k+9}$,

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3+17k^2+6k+10}{k^4+2k^3+4k+3}$,

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k^5+2}{17k^5+k^4+1}$,

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(e^k)}{k^2}$,

(v) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{k^2+3k}{k^2+1}$,

(vi) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2^k}$,

(vii) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(-1)^k}{k}$,

(viii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Für $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei dabei $k! = \prod_{i=1}^{k} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$. Außerdem sei $0! = 1$.