UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
M. Sc. Sebastian Langendörfer
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2016/17

Blatt 6 Abgabetermin: 10.02.2017, 12 Uhr

Aufgabe 1 (2+2+2+2=8 Punkte)**.** Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gebenenfalls ihren Grenzwert.

(i) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}(2-\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,

(ii) $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = \frac{n^2+1}{n^2+n}(\frac{n+1}{n})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,

(iii) $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n = (\frac{n}{n+1})^n \cos(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,

(iv) $(d_n)_{n\geq 1}$ mit $d_n = n\log(\frac{n+1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Aufgabe 2 (3+4+3=10 Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und geben Sie jeweils den größtmöglichen Bereich an, auf dem die Funktion stetig ist.

(i)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty, 0], \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), & x \in (0, \pi), \\ x, & x \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

(ii)

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1}, & x \in (-\infty, 1), \\ -2, & x = 1, \\ 2\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right), & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

(iii)

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \exp(\log(\frac{x^6+2x^4}{3x^4+x^2})), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x \mapsto e^x - x - \frac{3}{2}$ mindestens eine Nullstelle hat.

(*Hinweis: Sie müssen die Nullstelle nicht explizit berechnen. Erinnern Sie sich an ein allgemeines Resultat aus der Vorlesung.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (3+2+2+3 = 10 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \exp(\frac{\sin(x)}{x^2+1})$,

(ii) $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}, g(x) = \log(x^2 + 1)\sqrt{x}$,

(iii) $h : \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, h(x) = \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,

(iv) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k(x) = 2^x$
(*Hinweis: Erinnern Sie sich an die Definition von* 2^x*.*)

Aufgabe 5 (2+3+3 = 8 Punkte)**.** Bestimmen Sie Maxima und Minima der folgenden Funktionen:

(i) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 - 2x - x^2$,

(ii) $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x + 4x$,

(iii) $h : [-2, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto (x^2 + 1)e^x$.