



Übungen zur Vorlesung  
Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie  
Wintersemester 2016/17

Blatt 7

Abgabetermin: keiner

(Hinweis: Dieses Blatt dient zum Üben der nicht geübten Themen (Aufgaben 1-3) sowie zum Wiederholen von einigen für die Klausur relevanten Aufgabentypen (Aufgaben 4-10). Es wird nicht mehr abgegeben, aber am 03.03.2017 um 13 Uhr in Hörsaal II besprochen.)

(Hinweis: Wie in der Klausur benötigen Sie auch zur Lösung dieses Blattes keinen Taschenrechner. Ausdrücke wie  $\log(2)$  oder  $\sqrt{e}$  kann man einfach stehen lassen und muss sie nicht als Dezimalzahl näherungsweise ausdrücken.)

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{(x^2)}}{x}$ ,

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x}$ ,

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x-1}$ .

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i)  $\int_0^1 (4\sqrt{x} - 2x^3) dx$ ,

(ii)  $\int_1^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-3} \right) dx$ ,

(iii)  $\int_9^{16} \sqrt{\frac{1}{x^3}} dx$ ,

(iv)  $\int_0^1 (x^2 e^x) dx$ ,

(v)  $\int_0^1 (x \log(x^2 + 1)) dx$ ,

(vi)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ ,

(vii)  $\int_0^1 \log(x) dx$ .

**Aufgabe 3.** Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a)  $y'(x) = x + 1$ ,  $y(-2) = -1$ ,

(b)  $y'(x) = -xe^{y(x)}$ ,  $y(0) = 1$ .

**Aufgabe 4.** Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

- (i)  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $a_n = \frac{n^3+2n+4}{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ,
- (ii)  $(b_n)_{n \geq 1}$  mit  $b_n = 4^{\frac{n+1}{2n+3}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ,
- (iii)  $(c_n)_{n \geq 1}$  mit  $c_n = (2 + \log(1 + \frac{1}{n}))(1 + \frac{1}{n})^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ,
- (iv)  $(d_n)_{n \geq 1}$  mit  $d_n = \frac{2n+3}{n^2+1} \cos(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ .

**Aufgabe 5.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

- (i)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ ,
- (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,
- (iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2+n^3+3}$ ,
- (iv)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5+k^7}{2k^{21}+k^3}$ .

**Aufgabe 6.** Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und geben Sie jeweils den größtmöglichen Bereich an, auf dem die Funktion stetig ist.

(i)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{-\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \in (0, 2), \\ x^2, & x \in [2, \infty). \end{cases}$$

(ii)

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 55, & x = 0. \end{cases}$$

**Aufgabe 7.** Bestimmen Sie für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Lösungsmenge  $\mathbb{L}_t \subset \mathbb{R}^3$  des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & t-1 \\ -1 & -1 & 1 \\ t & -2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 8.** Man bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 9.** (i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

und folgern Sie, dass  $A$  invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie  $A^{-1}$ .

(Hinweis: Alle Einträge von  $A^{-1}$  sind ganzzahlig.)

(iii) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 10.** Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

(i)  $z^2 + 2i = 10z - 25$ ,

(ii)  $z^4 - 4 = 5iz^2$ .

(Hinweis: Sie dürfen folgende Tabelle verwenden:

$\alpha$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0	1	0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	0	1	/
$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\pi$	-1	0	0
$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3}{2}\pi$	0	-1	/
$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Angaben ohne Gewähr.)