Die von Neumannsche Ungleichung

Dominik Schillo

12. November 2012

Satz (Die von Neumannsche Ungleichung)

Seien $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom in einer Variablen und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ eine Kontraktion (d.h. $\|T\| \leq 1$). Dann gilt:

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{T}}.$$

Inhalt

Der eindimensionale Fall

Definition

Sei $R \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Dann heißt ein Operator $S \in \mathfrak{L}(\tilde{\mathcal{H}})$ *Dilatation von* R, falls gilt

1. $\tilde{\mathcal{H}}$ ist ein Hilbertraum mit $\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{H}}$,
2. $R = P_{\mathcal{H}} S|_{\mathcal{H}}$.

Der eindimensionale Fall

Definition

Sei $R \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Dann heißt ein Operator $S \in \mathfrak{L}(\tilde{\mathcal{H}})$ *Dilatation von* R, falls gilt

1. $\tilde{\mathcal{H}}$ ist ein Hilbertraum mit $\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{H}}$,
2. $R = P_{\mathcal{H}} S|_{\mathcal{H}}$.

Man nennt S *Potenz-Dilatation von* R, falls zusätzlich

$$R^n = P_{\mathcal{H}} S^n|_{\mathcal{H}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Der eindimensionale Fall

Definition

Sei $R \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Dann heißt ein Operator $S \in \mathfrak{L}(\tilde{\mathcal{H}})$ *Dilatation von* R, falls gilt

1. $\tilde{\mathcal{H}}$ ist ein Hilbertraum mit $\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{H}}$,
2. $R = P_{\mathcal{H}} S|_{\mathcal{H}}$.

Man nennt S *Potenz-Dilatation von* R, falls zusätzlich

$$R^n = P_{\mathcal{H}} S^n|_{\mathcal{H}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Zwei Dilatationen S_1 auf $\mathcal{H}_1$ und S_2 auf $\mathcal{H}_2$ von $R \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ heißen *(unitär) äquivalent*, falls eine unitäre Abbildung $\varphi \colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ existiert mit

1. $\varphi h = h \quad (h \in \mathcal{H})$,
2. $S_2 = \varphi^{-1} S_1 \varphi$.

Satz (Dilatationssatz von Sz.-Nagy)

Sei $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ eine Kontraktion. Dann existiert eine unitäre Potenz-Dilatation U von T. Man kann U minimal wählen in dem Sinne, dass

$$\tilde{\mathcal{H}} = \bigvee \{U^n \mathcal{H} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Außerdem sind zwei minimale unitäre Potenz-Dilatationen einer Kontraktion äquivalent.

Korollar (Die von Neumannsche Ungleichung)

Seien $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom in einer Variablen und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ eine Kontraktion. Dann gilt:

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{T}}.$$

Die Ungleichung auf dem Polyzylinder

Satz (Die zweidimensionale von Neumannsche Ungleichung)

Seien $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ *ein Polynom in zwei Variablen und* $T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ *zwei kommutierende Kontraktionen. Dann gilt:*

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}.$$

Satz (von Andô)

Für zwei kommutierende Kontraktionen $T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ existieren unitäre kommutierende Operatoren $U_1, U_2 \in \mathfrak{L}(\tilde{\mathcal{H}})$ auf einem Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$, sodass

$$T_1^n T_2^m = P_{\mathcal{H}} U_1^n U_2^m|_{\mathcal{H}}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz

Für zwei kommutierende Kontraktionen $T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ *existieren kommutierende Isometrien* $V_1, V_2 \in \mathfrak{L}(\tilde{\mathcal{H}})$ *auf einem Hilbertraum* $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$, *sodass*

$$T_1^n T_2^m = P_{\mathcal{H}} V_1^n V_2^m|_{\mathcal{H}}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Lemma

Zu zwei kommutierenden Isometrien $V_1, V_2 \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ *existieren kommutierende unitäre Operatoren* U_1, U_2 *auf einem Hilbertraum* $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$*, sodass*

$$U_i|_{\mathcal{H}} = V_i \quad (i = 1, 2).$$

Korollar (Satz von Andô)

Es existieren unitäre kommutierende Operatoren $U_1, U_2 \in \mathfrak{L}(\tilde{\mathcal{H}})$ auf einem Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$, sodass

$$T_1^n T_2^m = P_{\mathcal{H}} U_1^n U_2^m|_{\mathcal{H}}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt.

Korollar (Die zweidimensionale von Neumannsche Ungleichung)

Seien $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ ein Polynom in zwei Variablen und $T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ zwei kommutierende Kontraktionen. Dann gilt:

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}.$$

Gegenbeispiel (von Crabb-Davie)

Seien $\mathcal{H}$ ein 8-dimensionaler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $e, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h$ und $T_1, T_2, T_3 \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit

$$T_i e = f_i, \quad T_i f_j = \begin{cases} -g_i, & \text{falls } i = j, \\ g_k, & \text{falls } i \neq j \text{ mit } k \neq i, j, \end{cases}$$

$$T_i g_j = \delta_{i,j} h, \quad T_i h = 0$$

für $i, j, k = 1, 2, 3$ und $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ das Polynom mit

$$p(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_2 z_3 - z_1^3 - z_2^3 - z_3^3.$$

Dann sind T_1, T_2, T_3 kommutierende Kontraktionen mit

$$\| p(T_1, T_2, T_3) \| \geq 4 > \| p \|_{\mathbb{T}^3}.$$

Der Drury-Arveson Raum

Definition

1. Der Raum

$$H^2 = H^2(\mathbb{D})$$
$$= \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) : \|f\|_{H^2}^2 = \sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 \mathrm{d}t < \infty\}$$

heißt *Hardyraum* über der Einheitskreisscheibe.

2. Wir bezeichnen mit H^∞ den Raum aller beschränkten holomorphen Funktionen auf der Einheitskreisscheibe, d.h.

$$H^\infty = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) : \|f\|_{H^\infty} = \|f\|_{\mathbb{D}} < \infty\}.$$

Satz

Der Raum H^2 ist vermöge

$$\Phi\colon H^2 \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}),\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

1. $\mathbb{B} = \mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 < 1\} \subset \mathbb{C}^n$ die offene Einheitskugel

1. $\mathbb{B} = \mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 < 1\} \subset \mathbb{C}^n$ die offene Einheitskugel
2. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ setze $\gamma_\alpha = |\alpha|!/\alpha!$, wobei $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ und $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$

1. $\mathbb{B} = \mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 < 1\} \subset \mathbb{C}^n$ die offene Einheitskugel
2. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ setze $\gamma_\alpha = |\alpha|!/\alpha!$, wobei $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ und $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$
3. $z^\alpha = \prod_{i=1}^n z_i^{\alpha_i}$ für $z \in \mathbb{C}^n$

1. $\mathbb{B} = \mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 < 1\} \subset \mathbb{C}^n$ die offene Einheitskugel
2. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ setze $\gamma_\alpha = |\alpha|!/\alpha!$, wobei $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ und $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$
3. $z^\alpha = \prod_{i=1}^n z_i^{\alpha_i}$ für $z \in \mathbb{C}^n$

Wir betrachten nun den Hilbertraum

$$\ell^2(\gamma, \mathcal{H}) = \{a = (a_\alpha) : a_\alpha \in \mathcal{H} \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ und } \|a\| < \infty\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle (a_\alpha), (b_\alpha) \rangle_{\ell^2(\gamma, \mathcal{H})} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\langle a_\alpha, b_\alpha \rangle_{\mathcal{H}}}{\gamma_\alpha}.$$

1. $\mathbb{B} = \mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 < 1\} \subset \mathbb{C}^n$ die offene Einheitskugel
2. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ setze $\gamma_\alpha = |\alpha|!/\alpha!$, wobei $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ und $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$
3. $z^\alpha = \prod_{i=1}^n z_i^{\alpha_i}$ für $z \in \mathbb{C}^n$

Wir betrachten nun den Hilbertraum

$$\ell^2(\gamma, \mathcal{H}) = \{a = (a_\alpha) : a_\alpha \in \mathcal{H} \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ und } \|a\| < \infty\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle (a_\alpha), (b_\alpha) \rangle_{\ell^2(\gamma,\mathcal{H})} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\langle a_\alpha, b_\alpha \rangle_{\mathcal{H}}}{\gamma_\alpha}.$$

$n = 1$: $\ell^2(\gamma, \mathcal{H}) = \ell^2(\mathbb{N}, \mathcal{H})$

Proposition

Die Abbildung

$$\rho\colon \ell^2(\gamma, \mathcal{H}) \to \mathcal{O}(\mathbb{B}, \mathcal{H}),\ (a_\alpha) \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

ist wohldefiniert, injektiv und linear.

Proposition

Die Abbildung

$$\rho\colon \ell^2(\gamma, \mathcal{H}) \to \mathcal{O}(\mathbb{B}, \mathcal{H}),\ (a_\alpha) \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

ist wohldefiniert, injektiv und linear.

Definition

Der Hilbertraum

$$H(\mathbb{B}, \mathcal{H}) = \mathrm{Bild}(\rho)$$

mit dem durch ρ und $\ell^2(\gamma, \mathcal{H})$ induzierten Skalarprodukt

$$\langle \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha \rangle_{H(\mathbb{B}, \mathcal{H})} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\langle a_\alpha, b_\alpha \rangle_{\mathcal{H}}}{\gamma_\alpha}$$

heißt *Drury-Arveson Raum*.
Im Fall $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ schreiben wir auch $H(\mathbb{B})$ für $H(\mathbb{B}, \mathbb{C})$.

Proposition

Die Abbildung

$$\rho\colon \ell^2(\gamma,\mathcal{H}) \to \mathcal{O}(\mathbb{B},\mathcal{H}),\ (a_\alpha) \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

ist wohldefiniert, injektiv und linear.

Definition

Der Hilbertraum

$$H(\mathbb{B},\mathcal{H}) = \mathrm{Bild}(\rho)$$

mit dem durch ρ und $\ell^2(\gamma,\mathcal{H})$ induzierten Skalarprodukt

$$\langle \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha, \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha \rangle_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\langle a_\alpha, b_\alpha\rangle_{\mathcal{H}}}{\gamma_\alpha}$$

heißt *Drury-Arveson Raum*.
Im Fall $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ schreiben wir auch $H(\mathbb{B})$ für $H(\mathbb{B},\mathbb{C})$.
$n = 1$: $H(\mathbb{B}) = H^2$

Funktionale Hilberträume

Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum, X eine beliebige Menge und

$$\mathcal{H}^X = \{f; f : X \to \mathcal{H} \text{ Abbildung}\}.$$

Definition

Ein Hilbertraum $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}^X$ heißt *funktional*, falls alle Punktauswertungen

$$\delta_\lambda : \mathcal{K} \to \mathcal{H}, \ f \mapsto f(\lambda) \ (\lambda \in X)$$

stetig sind.

Funktionale Hilberträume

Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum, X eine beliebige Menge und

$$\mathcal{H}^X = \{f; f : X \to \mathcal{H} \text{ Abbildung}\}.$$

Definition

Ein Hilbertraum $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}^X$ heißt *funktional*, falls alle Punktauswertungen

$$\delta_\lambda : \mathcal{K} \to \mathcal{H}, \; f \mapsto f(\lambda) \; (\lambda \in X)$$

stetig sind.

Satz

Für einen Hilbertraum $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}^X$ sind äquivalent:

1. *$\mathcal{K}$ ist funktional.*
2. *Es existiert eine eindeutige Abbildung $K : X \times X \to \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit*
   2.1 *$K(\cdot, \mu)x \in \mathcal{K}$ für $\mu \in X$ und $x \in \mathcal{H}$,*
   2.2 *$\langle f, K(\cdot, \mu)x\rangle_{\mathcal{K}} = \langle f(\mu), x\rangle_{\mathcal{H}}$ für $f \in \mathcal{K}, \mu \in X, x \in \mathcal{H}$.*

   Man nennt K den reproduzierenden Kern von $\mathcal{K}$.

Satz

Der Raum $H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$ ist ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern

$$K_{\mathcal{H}} \colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}), \ (z, w) \mapsto \frac{1_{\mathcal{H}}}{1 - \langle z, w \rangle}.$$

Multiplikatoren

Seien nun $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilberträume und $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{H}_i^X$ $(i = 1, 2)$ funktionale Hilberträume mit reproduzierenden Kernen $K_i \colon X \times X \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}_i)$ $(i = 1, 2)$.

Multiplikatoren

Seien nun $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilberträume und $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{H}_i^X$ $(i = 1, 2)$ funktionale Hilberträume mit reproduzierenden Kernen $K_i \colon X \times X \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}_i)$ $(i = 1, 2)$.

Definition

Die Elemente von

$$\mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = \{\varphi \colon X \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) : \varphi \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2\},$$

heißen *Multiplikatoren* von $\mathcal{K}_1$ nach $\mathcal{K}_2$. Hierbei sei für $f : X \to \mathcal{H}_1$ die Abbildung $\varphi f : X \to \mathcal{H}_2$ definiert durch

$$(\varphi f)(\lambda) = \varphi(\lambda) f(\lambda) \ (\lambda \in X).$$

Für $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ nennen wir

$$M_\varphi \colon \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2, \; f \mapsto \varphi f$$

den *Multiplikationsoperator* mit Symbol φ.
Für $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$ schreiben wir $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ statt $\mathcal{M}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$.

Für $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ nennen wir

$$M_\varphi \colon \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2, \ f \mapsto \varphi f$$

den *Multiplikationsoperator* mit Symbol φ.
Für $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$ schreiben wir $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ statt $\mathcal{M}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$.

Bemerkung

Wir schreiben

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}(\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2)} = \|M_\varphi\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2)}$$

für $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$. Dies definiert eine Norm auf $\mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$, wenn die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) &\to \mathfrak{L}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2), \\ \varphi &\mapsto M_\varphi \end{aligned}$$

injektiv ist.

Für $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ nennen wir

$$M_\varphi\colon \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2,\ f \mapsto \varphi f$$

den *Multiplikationsoperator* mit Symbol φ.
Für $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$ schreiben wir $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ statt $\mathcal{M}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$.

Bemerkung

Wir schreiben

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}(\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2)} = \|M_\varphi\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2)}$$

für $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$. Dies definiert eine Norm auf $\mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$, wenn die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) &\to \mathfrak{L}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2), \\ \varphi &\mapsto M_\varphi \end{aligned}$$

injektiv ist. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $\mathcal{K}_1$ alle konstanten Funktionen $h \in \mathcal{H}_1$ enthält.

Definition

Das Tupel

$$M_z^{\mathcal{H}} = (M_{z_1}^{\mathcal{H}}, \ldots, M_{z_n}^{\mathcal{H}}) \in \mathfrak{L}(H(\mathbb{B}, \mathcal{H}))^n$$

heißt *n-Shift*.

Für $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ schreiben wir M_z statt $M_z^{\mathcal{H}}$.

Definition

Ein Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ kommutativer, stetig linearer Operatoren heißt *n-Kontraktion*, falls

$$\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \leq I_{\mathcal{H}}$$

gilt.

Definition

Ein Tupel $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ kommutativer, stetig linearer Operatoren heißt *n-Kontraktion*, falls

$$\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \leq I_{\mathcal{H}}$$

gilt.

Satz

Der n-Shift auf $H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$ ist eine n-Kontraktion.

Der mehrdimensionale Fall

Seien $p \in \mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ ein Polynom in n Variablen und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ eine beliebige n-Kontraktion. Gilt dann

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\mathbb{B}^n}?$$

Gegenbeispiel

Sei $\mathbb{B}^2$ die Einheitskugel in $\mathbb{C}^2$ und $M_z \in \mathfrak{L}(H(\mathbb{B}^2))^2$ der 2-Shift auf dem Drury-Arveson Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ definiert

$$p_n(z) = (2z_1 z_2)^n$$

ein Polynom $p_n \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ mit

$$\|p_n\|_{\mathbb{B}^2} = 1.$$

Zudem ist die Folge $(\|p_n(M_z)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

Die Verallgemeinerung nach Drury

Satz

Es gilt

$$\mathcal{M}(H^2) = H^\infty$$

mit Gleichheit der Normen.

Bemerkung

Wir können die von Neumannsche Ungleichung auch folgendermaßen formulieren.
Seien $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom in einer Variablen und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ eine Kontraktion. Dann gilt:

$$\|p(T)\| \leq \|p(M_z)\|,$$

da $M_p = p(M_z)$ und $\|p\|_{H^\infty} = \|p\|_{\mathcal{M}(H^2)} = \|M_p\|$ gilt.

Satz (Die von Neumannsche Ungleichung für n-Kontraktionen)

Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ in n Variablen und eine beliebige n-Kontraktion $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ gilt

$$\|p(T)\| \leq \|p(M_z)\|,$$

wobei M_z den n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum $H(\mathbb{B})$ bezeichnet.

Im Folgenden sei $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ stets eine n-Kontraktion.

Im Folgenden sei $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ stets eine n-Kontraktion.

Bemerkung

Für T definieren wir die positiven Operatoren

$$Q_{T_i} : \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}),\ X \mapsto T_i X T_i^* \ (i = 1, \ldots, n)$$

und

$$\Sigma_T = \sum_{i=1}^{n} Q_{T_i} : \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}).$$

Im Folgenden sei $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ stets eine n-Kontraktion.

Bemerkung

Für T definieren wir die positiven Operatoren

$$Q_{T_i} : \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}), \; X \mapsto T_i X T_i^* \;\; (i = 1, \ldots, n)$$

und

$$\Sigma_T = \sum_{i=1}^{n} Q_{T_i} : \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}).$$

Da $(\Sigma_T^k(I_{\mathcal{H}}))_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver Operatoren ist, konvergiert diese Folge punktweise gegen einen positiven Operator

$$A_{\infty,T} = SOT - \lim_{k \to \infty} \Sigma_T^k(I_{\mathcal{H}}) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}).$$

Lemma

Sei $D_{T^*} = (I_{\mathcal{H}} - \sum_{i=1}^n T_i T_i^*)^{\frac{1}{2}}$. *Durch*

$$\begin{aligned} K_T : \mathcal{H} &\to H(\mathbb{B}, \mathcal{H}), \\ x &\mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha (D_{T^*} T^{*\alpha} x) z^\alpha \end{aligned}$$

wird eine wohldefinierte, lineare Kontraktion definiert mit

$$\|K_T x\|^2 = \|x\|^2 - \|\sqrt{A_{\infty,T}} x\|^2$$

für $x \in \mathcal{H}$.

Lemma

Sei $D_{T^*} = (I_{\mathcal{H}} - \sum_{i=1}^n T_i T_i^*)^{\frac{1}{2}}$. *Durch*

$$K_T : \mathcal{H} \to H(\mathbb{B}, \mathcal{H}),$$
$$x \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha (D_{T^*} T^{*\alpha} x) z^\alpha$$

wird eine wohldefinierte, lineare Kontraktion definiert mit

$$\|K_T x\|^2 = \|x\|^2 - \|\sqrt{A_{\infty,T}} x\|^2$$

für $x \in \mathcal{H}$.

Definition

Eine n-Kontraktion $S = (S_1, \ldots, S_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ heißt *rein*, falls $A_{\infty,S} = 0$.

Lemma

Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ gilt

$$K_T p(T)^* = p(M_z^{\mathcal{H}})^* K_T.$$

Lemma

Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ gilt

$$K_T p(T)^* = p(M_z^{\mathcal{H}})^* K_T.$$

Lemma

Für $0 < r < 1$ ist $rT = (rT_1, \ldots, rT_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ eine reine n-Kontraktion.

Satz (Die von Neumannsche Ungleichung für n-Kontraktionen)
Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ in n Variablen und eine beliebige n-Kontraktion $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ gilt

$$\|p(T)\| \leq \|p(M_z)\|,$$

wobei M_z den n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum $H(\mathbb{B})$ bezeichnet.

Bemerkung

Sei $\mathcal{T} = \{p(M_z) : p \in \mathbb{C}[z]\} = LH(M_z^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n) \subset \mathfrak{L}(H(\mathbb{B}))$. Für eine n-Kontraktion $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ ist die Abbildung

$$\mathcal{T} \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}),\ p(M_z) \mapsto p(T)$$

ein kontraktiver Algebrenhomomorphismus.

Satz (Arveson)

Für eine n-Kontraktion $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ ist die Abbildung

$$\mathcal{T} \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}), \; p(M_z) \mapsto p(T)$$

ein unitaler vollständig kontraktiver Algebrenhomomorphismus.