§6

Konvergenz von Folgen

Definition 6.1 *Eine Folge in $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$).*

Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (a_n), $a_1, a_2 \dots$ *wobei* $a_n = f(n)$.

Beispiele:

1) $(1 + 2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \frac{33}{32}, \frac{65}{64} \dots$
   Vorstellung: "die Folge kommt immer näher an 1" dies geschieht in streng monotoner Weise: $a_{n+1} < a_n$

2) $a_n := i^n$, $n \in \mathbb{N}$, nimmt die Werte ± 1, $\pm i$ an; allerdings hat man nicht das Gefühl, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen dieser Werte strebt.

3) $a_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$
   (a_n ist die Summe der Kehrwerte der ersten n natürlichen Zahlen)

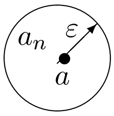
4) $a_n := \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \pm \ldots \pm \frac{1}{n}$
   (a_n ist die alternierende Summe der Kehrwerte der ersten n nat. Zahlen)

Bei 3) und 4) ist zunächst wohl nicht klar, wie sich a_n für große n verhält.

Definition 6.2 *Eine komplexe (oder auch reelle) Folge $\{a_n\}$ ist konvergent:* $\iff$

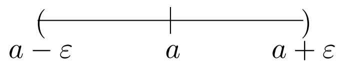
es gibt ein $a \in \mathbb{C}$ (bzw. $\in \mathbb{R}$) wie folgt: zu jedem $\varepsilon > 0$ (Fehlerschranke) findet man einen Index $N = N_\varepsilon$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_\varepsilon$$



in $\mathbb{C}$

"ε-Umgebung um a"



in $\mathbb{R}$

Egal wie klein man die Kreisscheibe um a (das Intervall um a) macht, außerhalb des Kreises (des Intervalls) liegen höchstens endlich viele a_n.

<u>Wichtig:</u> bei Konvergenzbeweisen muß man für alle $\varepsilon > 0$ prüfen!

$\boxed{\text{Wenn es ein } a \in \mathbb{C} \text{ wie oben gibt, so ist es eindeutig.}}$

andernfalls: zu $\varepsilon := \frac{1}{2}|a - a'|$ existiert ein N_1 mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_1$$

und ein N_2 mit

$$|a_n - a'| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_2.$$

Für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ folgt: $|a - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \varepsilon \cdot 2 = |a - a'|$, Widerspruch!

<u>Notation:</u>

1) a aus Def. 6.2 heißt <u>Limes, Grenzwert</u> von $\{a_n\}$,

$$\boxed{a = \lim_{a \to \infty} a_n, \; a_n \longrightarrow a \text{ für } n \to \infty.}$$

2) $\{a_n\}$ <u>Nullfolge</u> $:\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

3) $\{a_n\}$ <u>divergent</u> $:\Longleftrightarrow \{a_n\}$ nicht konvergent

Beispiele:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0 \quad \forall\, s \in \mathbb{Q},\, s > 0$
2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}^+$
3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
4) $\lim_{n\to\infty} z^n = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\, |z| < 1$
5) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\, z \in \mathbb{C}, |z| > 1$

Bemerkung: 5) sagt, dass für $k \in \mathbb{N}$ und $|z| > 1$ die Folge $|z|^n$ schneller wächst als die Potenzfolge n^k.

Beweis der Aussagen:

1) $\varepsilon > 0$ gegeben, fixiere $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \varepsilon^{-1/s}$ für alle $n \geq N$ folgt. (strenge Monotonie von $t \mapsto t^{-s}$)

$$\left|\frac{1}{n^s} - 0\right| = n^{-s} \leq N^{-s} < \left(\varepsilon^{-\frac{1}{s}}\right)^{-s} = \varepsilon$$

2) Sei $a \geq 1 \Longrightarrow x_n := \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0 \underset{\text{Bernoulli}}{\Longrightarrow}$

$$a = (1 + x_n)^n \geq 1 + n \cdot x_n > n \cdot x_n \quad \Longrightarrow$$

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = x_n < \tfrac{a}{n} < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N, \text{ falls } \quad N > a/\varepsilon$$

Sei $0 < a < 1$: benutze die Rechenregeln aus Satz 6.1 $\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \Big/ \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/a}}_{=1,\text{ da } 1/a>1} = 1/1 = 1$$

3) $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ und

$$n = (1 + x_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k \underset{(n\geq 2)}{\geq} 1 + \binom{n}{2} x_n^2 \quad \Longrightarrow$$

$$n - 1 \geq \tfrac{1}{2}\, n \cdot (n-1) \cdot x_n^2 \quad \Longrightarrow \quad x_n^2 \leq 2/n \quad \forall\, n \geq 2$$

$\varepsilon > 0$ gegeben; wähle $N > 2/\varepsilon^2 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon^2 > 2/n \quad \forall n \geq N,$

d.h. $x_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Daher: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

4) Folgerung aus Archimedes: $\exists N$ mit $|z|^N < \varepsilon$ (zu gegebenem $\varepsilon > 0$)
(Satz 3.4)

$|z| < 1 \implies |z|^n \leq |z|^N \quad \forall n \geq N$

Also: $|z^n - 0| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N$

5) Es ist $x := |z| - 1 > 0$; wähle $p \in \mathbb{N}$, $p > k \Longrightarrow (n \geq p)$

$$\begin{aligned} |z|^n &= (1+x)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{p} x^\ell > \binom{n}{0} x^p = \\ & \underbrace{n\,(n-1)\ldots(n-p+1)}_{p-\text{ Faktoren}} \tfrac{1}{p!}\, x^p = :\alpha \end{aligned}$$

Sei $n \geq 2p \implies n - p + 1 \geq \frac{n}{2} + 1 > \frac{n}{2}$

Also: $\alpha > (\frac{n}{2})^p\, \frac{1}{p!}\, x^p$

Es folgt für $n \geq 2p$:

$$\begin{aligned} |z|^n &> (\tfrac{n}{2})^p \tfrac{1}{p\,!}\, x^p = 2^{-p} \tfrac{1}{p!}\, x^p\, n^p = 2^{-p} \tfrac{1}{p\,!}\, x^p\, n^k\, n^{p-k} \\ \implies \frac{n^k}{|z|^n} &< 2^p \cdot p\,!\; x^{-p}\; n^{k-p} \\ &< \underbrace{2^p \cdot p\,! \cdot (|z|-1)^{-p}}_{=:\,K} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben; wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > K/\varepsilon$

$\implies n^k \Big/ |z|^n < \varepsilon \quad \forall\, n > \max\{N, 2p\}.$

$\square$

Redeweise: die Folge $\{a_n\}$ hat die Eigenschaft " E " <u>für fast alle n</u> $:\iff$ " E " gilt für alle bis auf endlich viele Indices n

Beispiel: $a_n > 0$ für fast alle n $:\iff$ $\exists\, m \in \mathbb{N}:\ a_n > 0$ für alle $n \geq m$

Satz 6.1 : <u>*(Rechenregeln für konvergente Folgen)*</u>

Gelte $a_n \to a$, $b_n \to b$ *für* $n \to \infty$

i) $a_n + b_n \to a + b$

ii) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

iii) $b \neq 0 \implies$ *fast alle* $b_n \neq 0$ *und* $a_n \big/ b_n \longrightarrow a/b$

iv) $|a_n| \to |a|, \quad \overline{a}_n \to \overline{a}, \quad {Re \atop Im}\, a_n \longrightarrow {Re \atop Im}\, a$

v) $a_n \le b_n$ *fast alle* $n \implies a \le b$ *(reelle Folgen !)*

vi) $a_n \in [\alpha, \beta]$ *für fast alle* $n \implies a \in [\alpha, \beta]$ *(reelle Folgen !)*

Beweis: i) $\surd$ ii) Es ist zunächst:

$$|a_n \cdot b_n - a_n \cdot b| = |a_n \cdot b_n - a_n \cdot b + a_n \cdot b - a \cdot b| \le$$

$|a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|$. $\{a_n\}$ ist konvergent $\implies$

$\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \le 1$ für alle $n \ge N_1 \implies$

$|a_n| \le 1 + |a| \quad \forall\, n \ge N_1$

(Folgerung: konvergente Folgen sind beschränkt!)

$$\text{Sei } \varepsilon > 0 \text{ gegeben} \implies \begin{cases} \exists\, N_2 \in \mathbb{N} \text{ mit } |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon \frac{1}{1+|a|} & \forall\, n \ge N_2 \\ \exists\, N_3 \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \frac{1}{|b|} & \forall\, n \ge N_3 \end{cases}$$

(hier o.E. $|b| > 0$)

zusammen: $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \varepsilon \quad \forall\, n \ge \max\{N_1, N_2, N_3\}$

iii) Sei $b > 0 \implies \exists\, N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| > \frac{|b|}{2} \quad \forall\, n \ge N$

dann: $|b| \leq |b_n - b| + |b_n| < \frac{|b|}{2} + |b_n| \implies |b_n| > \frac{|b|}{2} > 0 \quad \forall\, n \geq N,$

d.h. $1/b_n$ bildbar für $n \geq N$. Weiter ist

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \; |b_n - b| \leq \frac{2}{|b|^2} \; |b_n - b|$$

für diese n. $\varepsilon > 0$ gegeben $\implies$ $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \varepsilon \frac{|b|^2}{2}$ für alle $n \geq N_1$,

Also: $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq \max\{N, N_1\}$, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

iv) zum Beispiel ist $\Big| |a_n| - |a| \Big| \leq \Big| a_n - a \Big|$

Beweis der anderen Aussagen als Übung!

$\longrightarrow$ “die Menge der konvergenten Folgen bildet einen Vektorraum!” $\square$

Einfach aber nützlich ist

Satz 6.2 *:* *Einschließungssatz*

Seien $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{a_n\}$ relle Zahlenfolgen mit $A_n \leq a_n \leq B_n$ für fast alle n. Gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n$, so konvergiert auch $\{a_n\}$ gegen diese Zahl.

Beispiel: $A_1, \ldots, A_k$ seien reelle Zahlen ≥ 0, $k \in \mathbb{N}$ fest

$$x_n := \sqrt[n]{\sum_{j=1}^{k} A_j^n} \quad , n \in \mathbb{N}$$

Beh.: $\lim_{n\to\infty} x_n = \max\{A_1, \ldots, A_k\}$.

Beweis: Sei $\xi = \max\{A_1, \ldots, A_k\}$

$$\xi^n \leq \sum_{j=1}^{k} A_j^n \leq \xi^n \cdot k \implies$$

$$\xi \leq x_n \leq \sqrt[n]{k}\, \xi \quad \text{und} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1.$$

Mit Hilfe des Grenzwertkonzepts lassen sich Folgen vergleichen:

Definition 6.3 *:* **Vergleich von Folgen**

> $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *mit* $b_n \neq 0$ *heißen* *asymptotisch gleich* $:\Longleftrightarrow$
>
> $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \Big/ b_n = 1$. *Schreibweise:* $a_n \cong b_n$ *bei* $n \longrightarrow \infty$

Bemerkung: Es wird keine Konvergenz von $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ vorausgesetzt**!**

Beispiele:

1) $1 + 2 + \ldots + n \cong \frac{1}{2}\, n^2$ (Übung)

2) $$\boxed{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \cong \frac{1}{2\sqrt{n}}}$$ bei $n \to \infty$,

denn

$$\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \Big/ \left(1 \Big/ 2\sqrt{n}\right) = 2\sqrt{n^2+n} - 2n =$$

$$2n\left(\sqrt{1+1/n} - 1\right) \underset{*}{=} 2n\,\frac{1/n}{1+\sqrt{1+1/n}} = \frac{2}{1+\sqrt{1+1/n}}$$

$$\Big(* \qquad x - y = (x^2 - y^2)\Big/(x+y),\ x = \sqrt{1+1/n},\ y = 1\Big)$$

Es gilt

$$1 \leq \sqrt{1+1/n} \leq 1 + 1/n \underset{\text{Satz 6.2}}{\Longrightarrow} \sqrt{1+1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

□

Reelle Folgen $\{a_n\}$ sind Funktionen $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, also wissen wir, was z.B. Monotonie von reellen Folgen bedeutet. Wir definieren:

Definition 6.4 *a)* $\{x_n\}$ *Folge in* $\mathbb{C}$; $\{x_n\}$ *beschränkt* $:\Longleftrightarrow \exists\, M \in \mathbb{R}^+_\circ : \quad |x_n| \leq M$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen:

1) $\ldots \Longleftrightarrow \{x_n \in \mathbb{C} : \quad n \in \mathbb{N}\}$ *ist beschränkt Teilmenge von* $\mathbb{C}$

2) $\boxed{\{x_n\} \text{ konvergent } \Longrightarrow \{x_n\} \text{ beschränkt}}$ *(schon erledigt!)*

$\Big($ *Gegenbspl. zur Umkehrung:* $\quad x_n = (-1)^n \Big)$

b) $\{x_n\}$ *reelle Folge*

$$\{x_n\} \text{ (monoton) } \left.\begin{matrix} \underline{\text{wachsend}} \\ \underline{\text{fallend}} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_n \leq x_{n+1} \\ x_n \geq x_{n+1} \end{matrix}\right. \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\{x_n\}\underline{\text{streng}} \quad \ldots\ldots \quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} < \\ > \end{matrix}\right. \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Anschaulich klar ist nun

Satz 6.3 *:* $\boxed{\text{Jede beschränkte, monotone reelle Zahlenfolge ist konvergent.}}$

Genauer: *Sei* $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Dann gilt:*

i) $\{x_n\}$ *wachsend, nach oben beschränkt* $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup A$

ii) $\{x_n\}$ *fallend, nach unten beschränkt* $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf A$

Beweis:

i) Sei $x := \sup A$. Dann: $x_n \leq x$ für alle x_n. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $x_N \in A$ mit $x - \varepsilon \leq x_N$

$\{x_n\}$ wachsend $\Longrightarrow \quad x - \varepsilon \leq x_n \quad \forall\, n \geq N, \quad$ zusammen $x - \varepsilon \leq x_n \leq x \quad \forall n \geq N$

ii) analog (betrachte $\{-x_n\}$)

$\square$

Beispiele:

1) <u>Eulersche Zahl e</u>

Seien $\quad a_n := (1 + \frac{1}{n})^n,\ b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

Beh.: $\{a_n\}$ wachsend und nach oben beschränkt,

$\{b_n\}$ fallend und nach unten beschränkt

Beweis:

a) Es gilt $\quad a_n/a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \left\{\frac{1+1/n}{1+1/n-1}\right\}^n$

$$= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(1 - 1/n^2\right)^n \underset{\text{B.U.}}{\geq} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1$$

b) offensichtlich: $\quad a_n \leq b_n$

c)

$$b_{n-1}\Big/b_n = (1 + \tfrac{1}{n})^{-1} \cdot (1 + \tfrac{1}{n^2-1})^n \underset{\text{B.U.}}{\geq}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad b_{n-1} > b_n.$$

d) mit c) folgt:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < b_n < \ldots < b_2 < b_1 \quad \Longrightarrow$$

$$a_n < b_1 = 4, \quad b_n > a_1 = 2.$$

$\square$

Es gilt: $\quad 0 \leq b_n - a_n = a_n \cdot \frac{1}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad$ so dass

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad = \quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ \text{Eulersche Zahl} \ \ e \end{array}}$$

Praktische Berechnung: $c_n := \sum\limits_{k=0}^{n} 1/k!$ (Steffen p.253 f.)

Dann gilt: $a_n \leq c_n \leq b_n$, so dass $e = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

2) <u>Berechnung von Quadratwurzeln</u> (*Grenzwerte rekursiv definierte Folgen*)

$a > 0$ gegeben; <u>wie berechnet man $\sqrt{a}$</u> ?

Addition von x^2

$$x = \sqrt{a} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = a \quad \Longrightarrow \quad 2\,x^2 = x^2 + a \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{a}{x}\right)$$

Def.: $x_1 > 0$ beliebig; $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $n \geq 1$

Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$

(Mit den Methoden der Differentialrechnung läßt sich die Definition besser motivieren.)

Fall 1 $x_1 = \sqrt{a} \implies x_2 = \sqrt{a} \implies \ldots \quad x_n = \sqrt{a} \quad \forall\, n$
“unrealistische Wahl” für den Startwert, Normalerweise: $x_1 = 1$ o.ä.

Fall 2 $x_1 \neq \sqrt{a}$
Wir benutzen die

<u>Ungleichung zwischen dem</u>
<u>arith. u. geom. Mittel</u>

$$\left.\begin{array}{l}\end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\,(x+y) \ \geq \ \sqrt{x\cdot y} \\ \quad x, y \ \geq \ 0 \end{array}}$$

(Übung)

$$\Longrightarrow \quad x_2 = \tfrac{1}{2}\left(x_1 + \tfrac{a}{x_1}\right) \ \geq \ \sqrt{a}$$

allgemein: $\quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad \geq \quad \sqrt{a}$

Also: $\quad n \geq 2: \quad x_n \geq \sqrt{a} \quad \Longrightarrow \quad x_n^2 \geq a$

$\quad\quad \Longrightarrow \quad x_n \geq a/x_n$

Einsetzen der letzten Ungleichung: $\quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \;\leq\; \frac{1}{2}(x_n + x_n)$

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{\text{Ergebnis:}} & \{x_n\}\ \underline{\text{monoton fallend}} \\ \text{außerdem:} & \{x_n\}\ \text{nach unten beschränkt} \end{array}\right\} \underset{\text{Satz 6.3}}{\Longrightarrow} \quad x := \lim_{n\to\infty} x_n \text{ exist.}$$

<u>Da wir nun Konvergenz der Zahlenfolge $\{x_n\}$ wissen, können wir den Grenzwert x mit der Rekursionsgleichung ausrechnen:</u>

$$\begin{array}{ccccc} x_{n+1} & & & & \\ \downarrow & \scriptstyle n\to\infty & = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) & \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} & \frac{1}{2}\left(x + a/x\right) \\ x & & & & \end{array}$$

und Auflösen ergibt: $\quad x = \sqrt{a}$.

<u>Fazit:</u> Bei beliebig vorgebenem Startwert x_1 läßt sich $\sqrt{a}$ sukzessive via

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

ausrechnen.

<u>Verallgemeinerung:</u> $\quad p \in \mathbb{N}, \quad a > 0, \quad \sqrt[p]{a} = \;?$

$x_1 > 0$ beliebig, $\quad x_{n+1} := \frac{(p-1)x_n^p + a}{p \cdot x_n^{p-1}}$

Dann: $\quad \sqrt[p]{a} = \lim_{n\to\infty} x_n$

□

<u>Teilfolgen:</u> Bei $\{(-1)^n\}$ liegt keine Konvergenz vor, andererseits konvergiert die "Teilfolge" mit den geraden (ungeraden) Indices gegen $+1$ (bzw. -1).

Definition 6.5 *Sei $\{a_n\}$ eine komplexe Folge und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ <u>streng</u> <u>wachsend</u>. $\{a_{f(n)}\}$ heißt <u>Teilfolge</u> von $\{a_n\}$.*

<u>andere Schreibweise:</u> $n_k := f(k)$, dann $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ statt $\{a_{f(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$

Beispiel: $f(n) = 2 \cdot n \longrightarrow$ Teilfolge $\{a_{2n}\}$ der Glieder mit geradem Index.

Satz 6.4 *: Sei $\{a_n\}$ eine komplexe Folge. Dann gilt:*

$\{a_n\}$ ist konvergent $\Longleftrightarrow$ <u>jede</u> Teilfolge ist konvergent und <u>alle</u> haben <u>denselben</u> Grenzwert.

Beweis: "$\Longrightarrow$": Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\{a_{f(n)}\}$ eine Teilfolge. $\varepsilon > 0$ gegeben

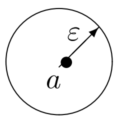
$\Longrightarrow$ $\exists\, N$ mit $|a_k - a| < \varepsilon \quad \forall\, k \geq N$ offenbar $\exists\, n_\circ \in \mathbb{N}$ mit $f(n_\circ) \geq N$; gemäß $f(n) \geq f(n_\circ)$ für $n \geq n_\circ$ ergibt sich $|a_{f(n)} - a| > \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\circ$, also $a_{f(n)} \longrightarrow a$ bei $n \to \infty$.

"$\Longleftarrow$": trivial! $f(n) := n$ erzeugt natürlich auch eine "Teilfolge", nämlich die Folge selbst! $\square$

Bei $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist man nicht in der Situation des Satzes!

Definition 6.6 *Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. <u>$a \in \mathbb{C}$ Häufungswert</u> von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: $\Longleftrightarrow$*

für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\{n \in \mathbb{N} : \ |a_n - a| < \varepsilon\}$ eine <u>unendliche Teilmenge von</u> $\mathbb{N}$.



(wichtig: <u>*die Menge*</u> $\{a_n : \ |a_n - a| < \varepsilon\}$ <u>*kann durchaus endlich sein !*</u>

Beispiele: 1) $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat $+1$ und -1 als Häufungswerte

2) $\{i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat vier Häufungswerte $\pm 1,\ \pm i$,

dagegen liegt z.B. in $\{a_n : |a_n - i| < \frac{1}{2}\}$ nur ein Element.

“ $|a_n - a| < \varepsilon$ <u>muß von unendlich vielen Indices erfüllt werden</u> ”

Satz 6.5 *a)* $\{a_n\}$ *konvergent* $\Longrightarrow$ *es gibt nur einen Häufungswert, nämlich den Grenzwert*

b) $a \in \mathbb{C}$ *Häufungswert von* $\{a_n\}$ $\Longleftrightarrow$ *es gibt eine Teilfolge* $\{a_{n_k}\}$ *mit* $a_{n_k} \to a$.

Warnung:

$$\Big|\ \text{es gibt genau einen Häufungswert} \ \not\Rightarrow\ \{a_n\} \ \text{konvergent}\ \Big|\ !$$

Gegenbeispiel: $a_n = \begin{cases} 1/n, & n \text{ ungerade} \\ n, & n \text{ gerade} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

Beweis von Satz 6.5: *a)* -

b) “$\Longleftarrow$”: a *Grenzwert von* $\{a_n\}$ $\underset{a)}{\Longrightarrow}$ a *Häufungswert von* $\{a_{n_k}\}$

$\Longrightarrow$ a *Häufungswert von* $\{a_n\}$

“$\Longrightarrow$”: *Konstruktion einer konvergenten Teilfolge:* *Sei* a *Häufungswert.*

$r > 0:$ $D_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - a| < r\}$

(r- Umgebung von a; im reellen Fall nimmt man Intervalle)

$\#\ \{n \in \mathbb{N} : \ a_n \in D_1(a)\} = \infty$ *wähle* $n_1 \in \mathbb{N}$ *mit* $a_{n_1} \in D_1(a)$

$\#\ \{n \in \mathbb{N} : \ a_n \in D_{1/2}(a)\} = \infty$ *wähle* $n_2 > n_1$ *mit* $a_{n_2} \in D_{1/2}(a)$

usw. $n_k > n_{k-1} > \ldots > n_1$ *mit* $a_{n_k} \in D_{1/k}(a)$

Aus $|a_{n_k} - a| < 1/k$ *folgt* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

□

Wie entscheidet man, ob eine gegebene Folge eine konvergente Teilfolge besitzt ?

Satz 6.6 *:* *(Bolzano-Weierstraß)*

Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt einen Häufungswert und damit eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Es genügt reelle Folgen zu betrachten, denn

$$\left| \begin{array}{llll} \{z_n\} = \{x_n + iy_n\} \text{ beschränkt} & \Longleftrightarrow & \{x_n\} \text{ und } \{y_n\} \text{ beschränkt,} \\ z_n \to z = x + iy & \Longleftrightarrow & x_n \to x \text{ und } y_n \to y. \end{array} \right.$$

Sei $\{a_n\}$ reelle Folge mit $|a_n| \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}^+$.

$[A_1, B_1] := [-M, M]$

$$[A_{k+1}, B_{k+1}] := \begin{cases} [X, B_k], & \text{falls } \ a_n \geq X \ \text{ für unendlich viele } n \\ [A_k, X] & \text{sonst} \qquad \Big(X := \frac{1}{2}(A_k + B_k)\Big) \end{cases}$$

definiert rekursiv eine Intervallschachtelung

offenbar: $(1)_k$ $\quad a_n \leq B_k$ $\quad$ für fast alle n $\quad$ (Induktion nach k)

$(2)_k$ $\quad \#\Big\{n \in \mathbb{N} : \quad a_n \in [A_k, B_k]\Big\} = \infty$ $\quad$ (Induktion nach k)

Sei $\quad a \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [A_k, B_k]$. $\quad$ Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\Big|[A_k, B_k]\Big| = B_k - A_k < \varepsilon \quad (da \quad [A_k, B_k] \quad Intervallschachtelung)$$

$a \in [A_k, B_k] \quad \Longrightarrow$

$a - \varepsilon \ < \ a - B_k + A_k \ < \ A_k,$

$a + \varepsilon \ > \ a - A_k + B_k \ > \ B_k,$

so dass $\quad [A_k, B_k] \ \subset \ (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$

$$\underset{(2)_k}{\Longrightarrow} \quad \#\Big\{n \in \mathbb{N} : \quad a_n \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon)\Big\} \ = \ \infty$$

$\underset{\text{Def. 6.5}}{\Longrightarrow} a$ ist H. W. von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>a ist sogar größter Häufungswert von</u> $\quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: $\quad a' > a \quad$ sei H.W.

setze $\quad \varepsilon := \frac{1}{2}(a' - a) > 0$; $\quad$ für $\quad \Big|[A_k, B_k]\Big| < \varepsilon \quad$ folgt

$$a_n \underset{\substack{\uparrow \\ (1)_k}}{\leq} B_k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{s.o.}}}{<} a + \varepsilon = \frac{1}{2}\, a' + \frac{1}{2}\, a = a' - \varepsilon$$

für fast alle n. $\quad$ Wenn aber für f.a. $\ n$ gilt $\quad a_n \leq a' - \varepsilon$, kann a' kein H.W. sein. $\square$

Definition 6.7 *: Sei* $\{a_n\}$ *<u>beschränkte reelle</u> Folge,*

$A := \{a \in \mathbb{R} : \ a$ *ist H.W. von* $\{a_n\}\}$.

$\sup A = \max A \quad$ *heißt limes superior von* $\quad \{a_n\}, \quad$ *i.z.*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \quad , \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

$\inf A = \min A \quad$ *heißt* $\quad$ *limes inferior von* $\quad \{a_n\}, \quad$ *i.z.*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Bemerkung: $\quad A \neq \emptyset \quad$ nach Bolzano-W. $\quad$ und beschränkt $\quad \Longrightarrow \quad \sup A, \inf A \quad$ definiert.

Unser Beweis zeigt: $\quad \sup A \in A, \quad$ also $\quad \sup A = \max A$
(analog für inf)

Übung: Rechenregeln für $\limsup$, $\liminf$ $\square$

Wir wollen die Divergenz von Folgen klassifizieren:

Definition 6.8 *:*

a) Für $K \in \mathbb{R}$ seien

$$
\begin{aligned}
(K, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : \quad x > K\}, && \text{“\underline{unbeschränkte Intervalle}”}\\
[K, +\infty) &:= \{\ldots\ldots\ldots \quad \geq \quad \},\\
(-\infty, K) &:= \{\ldots\ldots\ldots \quad < \quad \},\\
(-\infty, K] &:= \{\ldots\ldots\ldots \quad \leq \quad \}.
\end{aligned}
$$

b) Sei $\{a_n\}$ reelle Zahlenfolge.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= +\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall K > 0\, \exists N \text{ mit } a_n \in [K, \infty)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für alle } n \geq N\\
\lim_{n\to\infty} a_n &= -\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (-a_n) = +\infty
\end{aligned}
$$

Man sagt: Die Folgen sind bestimmt divergent (uneigentlich konvergent).

c)

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} a_n &= +\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{die Folge ist \underline{nicht} nach oben beschränkt}\\
\liminf_{n\to\infty} a_n &= -\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Beispiele und Bemerkungen:

a) Mit uneigentlich konvergenten Folgen kann man nicht wie üblich rechnen: $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - n) = +\infty$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 - \lim\limits_{n-\infty} n = \infty - \infty$ nicht definiert.

b) Unbestimmte Divergenz reeller Zahlenfolgen liegt dann vor, wenn die Folge weder bestimmt divergent noch konvergent ist. Beispiel: $\left\{(-1)^n\right\}$ ist unbestimmt divergent.

Bisher können wir nur für monotone reelle Zahlenfolgen apriori (d.h. ohne Kenntnis des Kandidaten für den Limes) entscheiden, ob Konvergenz vorliegt. Wir lernen jetzt ein anderes Kriterium kennen.

Definition 6.9 *: (Cauchy-Bedingung)*

Sei $\{a_n\}$ *eine Folge in* $\mathbb{C}$ $\quad \{a_n\}$ *Cauchy-Folge* $:\Longleftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad$ *für alle* $\quad n, m \geq N$

Satz 6.7 *:* <u>*Konvergenzkriterium von Cauchy*</u>

Sei $\{a_n\}$ *eine Folge in* $\mathbb{C}$. *Dann gilt:*

$\{a_n\}$ *konvergent* $\iff$ $\{a_n\}$ *Cauchy-Folge*

Bemerkung: eine Möglichkeit, Konvergenz zu zeigen: Rechne Cauchy-Bed. nach!

<u>Dabei wird oft ein Fehler gemacht:</u> $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}: \quad |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ <u>reicht nicht aus</u>!

Beispiel (s. ï¿½7): $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1/k, \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty,$ aber $a_{n+1} - a_n = 1/n + 1$!

Beweis: "$\Longrightarrow$": $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$\varepsilon > 0$ gegeben $\Longrightarrow \exists\, N$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/2 \quad \forall\, n \geq N$

Also gilt für $n, m \geq N$: $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

"$\Longleftarrow$" $\{a_n\}$ ist beschränkt: Sei $\varepsilon = 1$ in der Cauchy-Bed. $\Longrightarrow \exists\, N_1$ mit

$|a_n - a_m| < 1$ für $n, m \geq N$. Speziell: $|a_n| \leq |a_{N_1}| + 1 \quad \forall\, n \geq N_1$

Also: $|a_n| \leq \max\Big\{|a_1|, \ldots, |a_{N_1}|, |a_{N_1}| + 1\Big\} \forall\, n \in \mathbb{N}$

Bolzano - W. $\Longrightarrow \exists$ konvergente Teilfolge $\{a_{n_k}\}, \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} =: a.$

Man hat $|a_n - a| \leq |a_{n_k} - a| + |a_n - a_{n_k}|.$ Zu $\varepsilon > 0$

gibt es $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_{k_1}} - a| < \varepsilon/2$, der 2^{te} Summand wird nach der Cauchy-Bed. $< \varepsilon/2$, falls

$n_{k_1}, n \geq N_\varepsilon$, was für große k_1 sicher richtig ist.

Bemerkung: Nimmt man Satz 6.7 als gültig an, so folgt daraus (als Satz!) das Intervallschachtelungsprinzip (I.P..) Also:

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ (I.P.) $\Longrightarrow$ Bolzano - W. $\Longrightarrow$ Cauchy-Krit. $\Longrightarrow$ (I.P.),

man hätte also jede der drei Eigenschaften als Vollständigkeitsaxiom wählen können.