Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M.Sc.

Analysis III (WS 2012/13)
Blatt 10

Aufgabe 1 (6+4=10 Punkte)

Sei λ ein Maß auf X.

(a) Beweisen Sie: $f : X \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann λ-messbar, wenn jede Komponente von f λ-messbar ist.

(b) Seien zusätzlich Y, Z topologische Räume, $f : X \to Y$ sei λ-messbar und $g : Y \to Z$ sei stetig. Zeigen Sie, dass $g \circ f : X \to Z$ λ-messbar ist.

Aufgabe 2 (4+6=10 Punkte)

(a) Sei λ ein Maß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λ-messbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Satz von Egoroff nicht gilt, wenn man auf die Voraussetzung $\mu(A) < \infty$ verzichtet.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Für $0 \le s < \infty$ werden folgende Mengenfunktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert (mit $A \subset \mathbb{R}^n$):

(a) Für $0 < \delta \le \infty$ sei

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam} A_i}{2} \right)^s : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \operatorname{diam}(A_i) \le \delta, A_i \subset \mathbb{R}^n \, \forall i \in \mathbb{N} \right\},$$

wobei $\alpha(s) = \begin{cases} \text{Volumen der s-dim. Einheitskugel,} & s \in \mathbb{N} \\ > 0 \text{ beliebig,} & \text{sonst} \end{cases}.$

(b) $\mathcal{H}^s(A) = \lim\limits_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$.

Zeigen Sie: $\mathcal{H}^s_\delta$ und $\mathcal{H}^s$ sind Maße auf $\mathbb{R}^n$, $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta$ ist monoton fallend und schließen Sie daraus, dass $\mathcal{H}^s(A)$ existiert.

Aufgabe 4 (3+4+2+4+3+4=20 Punkte)

Es seien $\mathcal{H}^s_\delta$ und $\mathcal{H}^s$ die in Aufgabe 3 definierten Maße. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften von $\mathcal{H}^s$ bzw. $\mathcal{H}^s_\delta$:

(a) $\mathcal{H}^s$ ist ein Borel-Maß.

(b) $\mathcal{H}^s$ ist Borel-regulär.

(c) Setzt man $\alpha(0) = 1$, so ist $\mathcal{H}^0$ das Zählmaß.

(d) $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^s_\delta = \mathcal{L}^1$ auf $\mathbb{R}$ (für alle $\delta > 0$).

(e) $\mathcal{H}^s \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n$ für $n < s$.

(f) Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \le s < t < \infty$. Aus $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ folgt $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

Zusatzaufgabe (10 Punkte)

Konstruieren Sie eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$, welche nicht $\mathcal{L}^1$-messbar ist.

(*Hinweis*: Definieren Sie auf $\mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}$$

und bezeichnen Sie mit $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ die Menge aller Äquivalenzklassen $x + \mathbb{Q}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie nun das Auswahlaxiom.)

Abgabe: Donnerstag, 17.01.2013, bis 12:00 in die Briefkästen in Gebäude E2 5.