Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M.Sc.

Analysis III (WS 2012/13)
Blatt 11

Aufgabe 1 (6+6=12 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jede Regelfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^1$-messbar ist.
(*Hinweis:* Benutzen Sie den Approximationssatz 12.3 (vgl. Skript Analysis I))

(b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\mathcal{L}^1.$$

(*Hinweis:* Satz 12.7 (vgl. Skript Analysis I))

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $I = [a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall $(a \in \mathbb{R}, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b)$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie: f ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_a^b |f(x)|dx = \lim_{t \uparrow b} \int_a^t |f(x)|dx$$

existiert, und in diesem Fall ist

$$\int_I f d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x)dx.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ein Maß auf $\mathbb{R}$ mit $\lambda(\{t\}) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und sei $|f|$ λ-integrierbar,wobei f auch Werte in $\mathbb{C}$ annehmen kann. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \int_{(-\infty,x]} f d\lambda$$

stetig ist. Bleibt diese Aussage richtig, wenn man λ durch das Zählmaß μ auf $\mathbb{R}$ (versehen mit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) ersetzt?

Aufgabe 4 (3+5=8 Punkte)

Sei λ ein Maß auf X.

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer λ-messbarer Funktionen. Finden Sie ein Beispiel, sodass im Lemma von Fatou gilt:

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\lambda < \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\lambda.$$

(b) Sei f nicht-negativ und λ-messbar mit $\int f d\lambda < \infty$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz, dass

$$N := \{x \in X : f(x) = \infty\}$$

eine λ-Nullmenge ist.

Aufgabe 5 (4+6=10 Punkte)

(a) Seien λ und ρ Maße auf X bzw. Y. Zeigen Sie, dass das Produktmaß $\lambda \times \rho$ ein Maß auf $X \times Y$ ist.

(b) Zeigen Sie: Für das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\mathcal{L}^{n+m} = \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m.$$

Zusatzaufgabe (10 Punkte)

Sei λ ein Maß auf X und $f_k : X \to [0,\infty]$ eine Folge nicht-negativer λ-messbarer Funktionen. Weiterhin existiere eine nicht-negative Majorante f mit $\int f d\lambda < \infty$, sodass

$$f_k \leq f \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen das Lemma von Fatou auch rückwärts gilt, also:

$$\limsup_{k\to\infty} \int f_k d\lambda \leq \int \limsup_{k\to\infty} f_k d\lambda.$$

Abgabe: Donnerstag, 24.01.2013, bis 12:10 in die Briefkästen in Gebäude E2 5.