Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M.Sc.

Analysis III (WS 2012/13)
Blatt 12

Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

Lebesgue-integrierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \int\limits_{[0,\pi]} f_n d\mathcal{L}^1$$

für $n \in \mathbb{N}$ konvergiert und berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1+x^4}$ Lebesgue-integrierbar ist und berechnen Sie $\int\limits_{[0,\infty)} f d\mathcal{L}^1$.

Aufgabe 3 (2+5+5=12 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist stetig.

(b) Das uneigentliche Riemann-Integral $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ existiert.

(c) Die Funktion f ist nicht Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)

Seien $\mathcal{L}^k, \mathcal{L}^{n-k}$ und $\mathcal{L}^n$ die Lebesgue-Maße auf $\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k}$ und $\mathbb{R}^n$. Seien außerdem $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-k})$ Borelmengen. Zeigen Sie:

(a) Haben A und B endliches Lebesgue-Maß, so ist $\mathcal{L}^n(A \times B) = \mathcal{L}^k(A) \cdot \mathcal{L}^{n-k}(B)$. (*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst mit Hilfe geeigneter Quaderüberdeckungen von A und B, dass $A \times B$ eine Menge endlichen Lebesgue-Maßes ist und benutzen Sie anschließend den Satz von Fubini.)

(b) Ist $\mathcal{L}^k(A) = 0$, so ist auch $\mathcal{L}^n(A \times B) = 0$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Lebesguemaß der Menge

$$A = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + w^2} \leq 1\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(*Hinweis*: Verwenden Sie ebene Polarkoordinaten.)

Zusatzaufgabe (5+5=10 Punkte)

Sei $n \geq 2$ und $B = \{x \in \mathbb{R}^{n-1}; |x| < 1\}$ die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n-1}$. Die Abbildung $\Phi : B \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ sei gegeben durch

$$\Phi(x, r) = (rx, r\sqrt{1 - |x|^2}).$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ C^∞-invertierbar ist, und dass für alle $(x, r) \in B \times (0, \infty)$ gilt:

$$\det(D\Phi(x, r)) = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - |x|^2}}.$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)} f d\mathcal{L}^n = \int\limits_{(0,\infty)} \left(\int\limits_B \frac{f(rx, r\sqrt{1 - |x|^2})}{\sqrt{1 - |x|^2}} d\mathcal{L}^{n-1}(x) \right) r^{n-1} d\mathcal{L}^1(r).$$

Abgabe: Donnerstag, 31.01.2013, bis 11:59 in die Briefkästen in Gebäude E2 5.