Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M.Sc.

Analysis III (WS 2012/13)
Blatt 3

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass keine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert, die injektiv ist.
(*Hinweis*: Mit f wäre auch $f(0, \cdot)$ injektiv.)

Aufgabe 2 (5+3=8 Punkte)

Gegeben sei die nichtlineare Gleichung

$$zx^4 + 2x\cos(y) + \sqrt{2}\sin(z) = 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$, eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}$ von $\frac{\pi}{4}$ und eine C^∞-Funktion $\varphi : U \to V$ existieren mit $\varphi(0,0) = \frac{\pi}{4}$ und

$$\left\{(x,y,z) \in U \times V : zx^4 + 2x\cos(y) + \sqrt{2}\sin(z) = 1\right\} = \{(x, y, \varphi(x,y)) : (x,y) \in U\}.$$

(b) Berechnen Sie $\nabla\varphi(0,0)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Wir betrachten ein reales Gas mit Druck p_0, Temperatur T_0 und Volumen V_0, welches der van der Waal'schen Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT$$

genügt und für welches $p_0 - \frac{an^2}{V_0^2} + \frac{2abn^3}{V_0^3} \neq 0$ erfüllt ist. Um den thermischen Ausdehnungskoeffizienten $\alpha := \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}$ und die Kompressibilität $\beta := \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$ des realen Gases an der Stelle (p_0, T_0, V_0) zu berechnen, kann man den umständlichen Weg über die explizite Darstellung der durch die Zustandsgleichung implizit definierten Funktion $V = V(p,T)$ vermeiden. Berechnen Sie α und β durch Anwendung des Satzes über implizite Funktionen.
($n \mathrel{\widehat{=}}$ Molanzahl (konstant), $R \mathrel{\widehat{=}}$ Naturkonstante, $a, b \mathrel{\widehat{=}}$ Materialkonstanten.)

Bitte wenden!!!

Aufgabe 4 (5+3+2=10 Punkte)

Sei X der Raum der reellen $(n \times n)$-Matrizen mit $n \geq 2$. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ konvex sind:

(a) $f_1(A) = |A|^p, \ p > 1 \quad (|A| := (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}})$.

(b) $f_2(A) = \det A$.

(c) $f_3(A) = \operatorname{Spur} A$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von f. Zeigen Sie: Ist die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ invertierbar, so gibt es eine Umgebung U von x_0, in welcher x_0 der einzige kritische Punkt von f ist.

Zusatzaufgabe (2+4+4=10 Punkte)

Sei X wie in Aufgabe 4 wieder der Raum der reellen $(n \times n)$-Matrizen. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $U := \{A \in X : \ \det A \neq 0\}$ ist offen.

(b) Die Abbildung
$$F : U \to U, \, A \mapsto A^{-1}$$
ist beliebig oft differenzierbar.

(c) Seien $f : X \to \mathbb{R}$ die Determinantenabbildung und $A \in X$. Zeigen Sie, dass f zur Klasse C^∞ gehört und beweisen Sie
$$f'(E)(A) = \operatorname{Spur} A,$$
wobei $E \in X$ die Einheitsmatrix ist.

Abgabe: Donnerstag, 15.11.2012, bis 12:10 in die Briefkästen in Gebäude E2 5.