Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M.Sc.

Analysis III (WS 2012/13)
Blatt 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 3$$

unter der Nebenbedingung $h(x, y) = x^2 + y - 2 = 0$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + 2xy - z^2$ und $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Zeigen Sie, dass $\min f(M)$ und $\max f(M)$ existieren und berechnen Sie alle Punkte, in denen f ihr Minimum bzw. Maximum annimmt.

Aufgabe 3 (4+5+3+4+4=20 Punkte)

(a) Seien $n = 2$ und $f(x, y) = x^2 - y^2$. Wir setzen $M_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$, wobei $c \geq 0$. Für welche c ist M_c eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞ von $\mathbb{R}^2$?

(b) Zeigen Sie, dass der Tangentialraum an eine Untermannigfaltigkeit M in einem Punkt $p \in M$ nicht von der gewählten Karte abhängt.

(c) Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Fläche $x = 2u, y = u^2 + v, z = v^2$ im Punkt $(0, 1, 1)$.

(d) Wir betrachten Satz 21.3 (iii) im Falle "$k = n$". Zeigen Sie, dass man in diesem Fall genau die offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ erhält.

(e) Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und "$k = n$". Zeigen Sie, dass $T_pM = \mathbb{R}^n$ gilt.

Bitte wenden!!!

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen und sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Für einen Punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ gelte $f(x_0, y_0) = 0$ und ferner sei die Matrix

$$A := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x_0, y_0) \right)_{j,k=1,\ldots,n}$$

invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren in dieser Situation eine offene Umgebung V von x_0, eine offene Umgebung W von y_0 und eine Funktion $\hat{\varphi} \in C^1(V, W)$ mit $f(x, \hat{\varphi}(x)) = 0$ für alle $x \in V$.
Zeigen Sie, dass

$$J_{\hat{\varphi}}(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \hat{\varphi}(x)) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \hat{\varphi}(x))$$

für alle $x \in V$ gilt.

Abgabe: Donnerstag, 22.11.2012, bis 12:10 in die Briefkästen in Gebäude E2 5.