Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M.Sc.

Analysis III (WS 2012/13)
Blatt 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Seien $I = [a, b]$, $t_0 \in [a, b]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und die Funktionen $b \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$, $A \in C^0(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ gegeben. Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= A(x) \cdot y(x) + b(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

genau eine lokale Lösung besitzt.

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

Für das Anfangswertproblem $y' = f(x, y), y(\xi) = \eta$ ist die sog. Picard-Iteration definiert durch

$$y_0 = \eta, \quad y_n(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y_{n-1}(t))dt.$$

(a) Lösen Sie auf $[0, \infty)$ das Anfangswertproblem

$$y' = ty, \quad y(0) = 1$$

mit Hilfe der Picard-Iteration. Führen Sie dabei zunächst einige Iterationsschritte durch, um das Bildungsgesetz der Iterierten zu erraten, und beweisen Sie Ihre Vermutung durch Induktion, bevor Sie mit $n \to \infty$ zur Grenze übergehen.

(b) Lösen Sie auf $[0, \infty)$ das Anfangswertproblem

$$y' = 2ty + 2t, \quad y(0) = 1$$

mit Hilfe der Picard-Iteration. Führen Sie dabei zunächst einige Iterationsschritte durch, um das Bildungsgesetz der Iterierten zu erraten, und beweisen Sie Ihre Vermutung durch Induktion, bevor Sie mit $n \to \infty$ zur Grenze übergehen.

Bitte wenden!!!

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \to M$ eine stark kontrahierende Abbildung (d.h. es gibt eine Zahl ρ mit $0 \leq \rho < 1$, so dass für alle $x, y \in X$ gilt: $d(Tx, Ty) \leq \rho d(x, y)$). Zeigen Sie den Banachschen Fixpunktsatz:

(a) T hat genau einen Fixpunkt $\overline{x}$.

(b) Für jedes $x_0 \in M$ und die zugehörige Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = Tx_n$ gilt $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$.

(c) $d(x_n, \overline{x}) \leq d(x_0, x_1)\frac{\rho^n}{1-\rho}$ (a priori-Abschätzung).

(d) $d(x_n, \overline{x}) \leq d(x_{n-1}, x_n)\frac{\rho}{1-\rho}$ (a posteriori-Abschätzung).

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $k \in C^0([a, b] \times [a, b])$ mit

$$\sup\{|k(x, t)| : (x, t) \in [a, b] \times [a, b]\} < \frac{1}{b-a}.$$

Zeigen Sie: Zu jedem $g \in C^0([a, b])$ existiert genau ein $f \in C^0([a, b])$ mit

$$f(x) = g(x) + \int_a^b k(x, t)f(t)dt \quad (x \in [a, b]).$$

(*Hinweis*: Banachscher Fixpunktsatz.)

Aufgabe 5 (5+4+3=12 Punkte)

(a) Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann stark kontrahierend ist, wenn $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

(b) Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Gleichung

$$2x - \sin(x) = \frac{1}{2}$$

genau eine Lösung im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ besitzt.

(c) Wie viele Iterationsschritte sind nötig, um den Fixpunkt mit einer Genauigkeit von 10^{-3} zu bestimmen? Nehmen Sie $x_0 := 0$ als Startpunkt ihrer Iteration.

Abgabe: Donnerstag, 29.11.2012, bis 12:10 in die Briefkästen in Gebäude E2 5.