26

Vektoranalysis - Kurvenintegrale von Vektorfeldern und 1-Formen

Typische Frage: Wann ist ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ konservativ, d.h. $F = \nabla f$?

Definition 26.1 : (1-Form)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $(\mathbb{R}^n)^*$ sei der Dualraum von $\mathbb{R}^n$.
Eine **1-Form** *auf U ist eine stetige Abbildung $\varphi : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$.*
(Andere Sprechweise: 1-Form ist **Differentialform vom Grad 1)**

Darstellung von 1-Formen

$$\begin{aligned} e_1, \ldots, e_n &= \text{Standardbasis voni } \mathbb{R}^n \\ e^1, \ldots, e^n &= \text{duale Basis, d.h.} \end{aligned}$$

$e^i \in (\mathbb{R}^n)^*$ wird definiert durch $e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Sei $\varphi : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ eine 1-Form $\Longrightarrow$ $\varphi(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$ für jedes x $\Longrightarrow$

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e^i}$$

mit **eindeutig bestimmten (stetigen) Koeffizientenfunktionen** $\varphi_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
Beachte :

per Def. ist eine 1-Form φ an jeder Stelle $x \in U$ eine **lineare** Abbildung $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, wirkt also auf Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$:$\boldsymbol{\varphi(x)(v)}$ **ist linear in** $\boldsymbol{v}$.

Notation :

dx^i ist die **konstante** 1-Form, $dx^i(x) \equiv e^i \; \forall\, x \in \mathbb{R}^n$
(in $\mathbb{R}^2$: dx, dy, in $\mathbb{R}^3$: dx, dy, dz, statt dx^1, dx^2 bzw. dx^1, dx^2, dx^3)
für eine beliebige 1-Form φ gilt deshalb

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \, dx^i.$$

Beispiele :

(1) **„Differentiale":** $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei C^1 $\Longrightarrow$ Df ist 1-Form, da $Df(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ linear per Definition der Ableitung

Schreibweise : df statt Df

Es gilt :

$$df(x)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx^i} \text{ „äußere Ableitung"}$$

konkret :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \cdot \sin y \\ df(x,y) &= \sin y \, dx + x \cdot \cos y \, dy \end{aligned}$$

(2) **Vektorfelder:** $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \xrightarrow{C^\circ} \mathbb{R}^n$
ordne F die 1-Form

$$\boxed{\varphi_F : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*, \; \varphi_F = \sum_{i=1}^{n} F_i \, dx^i}$$

zu; umgekehrt gehört zu

$$\Psi : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$$

das Vektorfeld

$$G = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n).$$

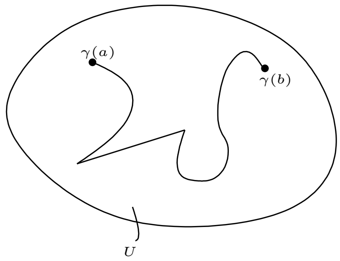
konkret :

$$F(x,y,z) = (z, e^{xy}, x^2) \quad \longrightarrow \quad \varphi(x,y,z) = z \, dx + e^{xy} \, dy + x^2 \, dz.$$

Man sieht :

$$\{\text{1-Formen auf } U\} \;\cong\; \{\text{Vektorfelder } U \xrightarrow{C^\circ} \mathbb{R}^n\}.$$

Integration von 1-Formen (Vektorfeldern) längs Wegen



Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ **stückweise glatter Weg in U**,

d.h. es gibt eine Zerlegung $a = t_\circ < t_1, < \ldots < t_N = t$

wie folgt:

(i) $\gamma \in C^\circ([a,b], U)$
(ii) $\gamma \in C^1((t_{k-1}, t_k), U)$ für $k = 1, \ldots, N$
(iii) $\gamma'|_{(t_{k-1},t_k)}$ läßt sich stetig in die Randpunkte fortsetzen.

(**Bemerkung :** t_k ist i.a. Sprungstelle von γ')

Definition 26.2 : Wegintegral

Sei γ wie oben und $\omega : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ 1-Form.
Dann ist $(\omega \circ \gamma)(\gamma') : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und

$$\boxed{\int\limits_\gamma \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\, dt}$$

heißt Wegintegral von ω längs γ.

$\square$

Bemerkungen :

(1) Die Def. hängt **nicht** von der Wahl der Parametrisierung von γ ab, denn :
$\sigma : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ sei Umparametrisierung von γ mit (o.E.) $\sigma' > 0$.
Mit $\Gamma : [c,d] \longrightarrow U$, $\Gamma := \gamma \circ \sigma$, folgt :

$$\begin{aligned} & \int_c^d \omega(\Gamma(t))(\Gamma'(t))\, dt \\ = \quad & \int_c^d (\omega \circ \gamma)(\sigma(t))(\gamma'(\sigma(t))\sigma'(t))\, dt \\ \overset{\text{Linearität}}{=} \quad & \int_c^d (\omega \circ \gamma)(\sigma(t))(\gamma'(\sigma(t))) \cdot \sigma'(t)\, dt \\ \overset{\text{Sustitutionsregel}}{=} \quad & \int_a^b (\omega \circ \gamma)(s)(\gamma'(s))\, ds. \end{aligned}$$

(2) Schreibe $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \, dx^i$

$$\Longrightarrow \quad \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t)) \, dx^i(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t)) \, e^i(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)$$

Also :

$$\boxed{\int\limits_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t))\gamma_i'(t) \, dt} \quad \textbf{Komponentendarstellung}$$

(3) Sei $F \in C^\circ(U, \mathbb{R}^n)$ stetiges Vektorfeld; setze

$$\boxed{\int\limits_{\gamma} F := \int_a^b F(\gamma(t) \bullet \gamma'(t) \, dt} \quad \textbf{Kurvenintegral des Vektorfeldes } \boldsymbol{F}$$

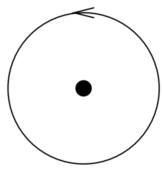
offenbar :

$$\int\limits_{\gamma} F = \int\limits_{\gamma} \omega_F,$$

so dass alle folgenden Aussagen über Kurvenintegrale von 1-Formen auch für Integrale von Vektorfeldern gelten.

(4) **Beispiel :**

$$U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$
$$\omega(x,y) := \tfrac{1}{x^2+y^2}(-y) \, dx + \tfrac{1}{x^2+y^2} x \, dy$$
$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \; 0 \le t \le 2\pi$$



dann :

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \text{ und } \omega(\gamma\,(t)) = -\sin t \, dx + \cos t \, dy$$

Also :

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{0}^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi$$

Obwohl der Weg geschlossen ist, ist das Kurvenintegral $\neq$ 0.

Analog :

$$\int\limits_{\gamma} \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big) = 2\pi$$

für das Kurvenintegral des Vektorfeldes.

(5) Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ regulär, d.h. injektiv mit $\gamma'(t) \neq 0$. Dann ist $\Gamma := \gamma([a,b])$ 1-dim. Mannigfaltigkeit mit natürlichen Orientierung des „Tangentialraums", man wählt $\gamma' / |\gamma'|$ als Tangentenfeld an die Kurve, setzt also

$$T : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ T(p) := \gamma'(t) / |\gamma'(t)|, \text{ falls } p = \gamma(t).$$

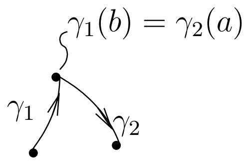
Dann gilt : ($\rightarrow$ Flächenformel)

$$\boxed{\int_\gamma \omega = \int_\Gamma \omega(p)\,(T(p))\,d\mathcal{H}^1(p)}$$

Rechenregeln für $\int_\gamma \omega$:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \int_\gamma (\omega_1 + \omega_2) & = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2 \\
(2) & \int_\gamma (c \cdot \omega) & = c \cdot \int_\gamma \omega, \quad c \in \mathbb{R} \\
(3) & \int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega & = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega
\end{array}$$

wobei in (3) Endpunkt(γ_1) = Anfangspunkt(γ_2), also



$\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow U$, $\gamma_2 : [a,b] \longrightarrow U$, mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$.

Dann sei

$$\gamma_1 + \gamma_2 : [a, 2b-a] \longrightarrow U, \quad \gamma_1 + \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & , \quad a \leq t \leq b \\ \gamma_2(a+t-b) & , \quad b \leq t \leq 2b-a. \end{cases}$$

(1) - (3) folgen trivial aus der Definition.

Definition 26.3 :

Sei ω eine 1-Form auf U. ω heißt **exakt**

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\ f \in C^1(U,\mathbb{R}) \ \mathit{mit}\ \boxed{df = \omega},\ \mathit{d.h.}\ \omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i.$$

f heißt **eine Stammfunktion zu ω**.

Bemerkung :

Sei $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfeld; dann:

$$\omega_F \text{ exakt} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, f \in C^1(U, \mathbb{R}) : \boxed{\nabla f = F}.$$

Man sagt:

das Vektorfeld F ist konservativ und f heißt ein Potential von F.

Wie prüft man Exaktheit? Dazu zur Vorbereitung folgender

Satz 26.1 :

Sei ω eine 1-Form auf U. Dann sind äquivalent:

(i) $\int_\gamma \omega = 0 \quad \forall$ *geschlosene Wege γ in U*

(ii) $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ *für alle Wege γ_1, γ_2 in U mit gleichem Anfangs- und Endpunkt.*

Ist ω exakt, so gelten (i) und (ii).

Beweis :

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

Sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ geschlossen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$. Setze

$$\Gamma : [a, b] \longrightarrow U,\ \Gamma(t) \equiv \gamma(a) \quad \Longrightarrow \quad \int_\Gamma \omega = 0$$

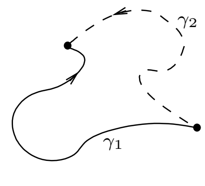
und nach (ii) gilt: $\int_\gamma \omega = \int_\Gamma \omega$.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

bilde $\quad \gamma := \gamma_1 + (-\gamma_2)$,

wobei γ_2 durch Orientierungsumkehrung entsteht:

$-\gamma_2 : [a, b] \longrightarrow U, \quad t \mapsto \gamma_2(b + a - t)$



$\Longrightarrow \gamma$ ist geschlossen, d.h.

$$0 = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1 + (-\gamma_2)} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{-\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega.$$

Sei nun $\omega = df$. Dann ist wegen $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx^i$

$$\int\limits_\gamma \omega = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma_i'(t)\, dt = \int\limits_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0,$$

falls γ geschlossen.

$\square$

Bemerkungen :

(1) Die Eigenschaften (ii) nennt man **Wegunabhängigkeit** von $\int\limits_\gamma \omega$. Also

$$\boxed{\omega \text{ exakt auf } U \Longrightarrow \text{Wegunabhängigkeit}}$$

Die Umkehrung wird gleich untersucht.

(2) Die 1-Form $\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$ ist also auf $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ **nicht exakt**.

Satz 26.2 :

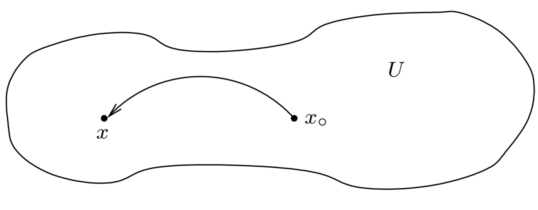
Sei ω eine 1-Form auf der **wegzusammenhängenden** *Menge U. Dann gilt:*

$$\boxed{\omega \textit{ exakt} \Longleftrightarrow \textit{das Kurvenintegral hängt nicht vom Weg ab.}}$$

Beweis :

„$\Rightarrow$" erledigt (auch für beliebige U)

„$\Leftarrow$"

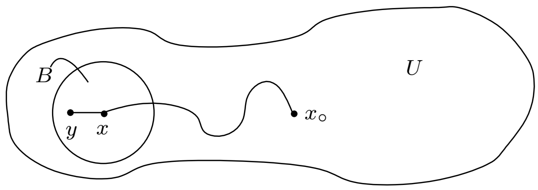


Fixiere einen (Basis-) Punkt $x_\circ$ in U und setze

$$f(x) := \int\limits_\gamma \omega$$

für einen beliebige (stückweise glatten) Weg von $x_\circ$ nach x. Offenbar ist $f(x)$ wohldefiniert (, und da U als zusammenhängend vorausgesetzt wird, gibt es mindestens einen Weg von $x_\circ$ nach x in U).

Z.z.: $df = \omega$



Sei dazu $x \in U$, B sei eine kleine Kugel um x in U. Sei γ ein Weg von $x_\circ$ nach x

$$\Longrightarrow \quad \gamma + \vec{xy} \text{ ist Weg von } x_\circ \text{ nach } y,\ y \in B$$

$$\Longrightarrow \quad f(y) - f(x) = \int_{\vec{xy}} \omega = \int_0^1 \omega(x + t(y-x)(y-x)\,dt$$

$$\overset{\text{MWS}}{=} \quad \omega(x + s\,(y-x))(y-x) \text{ für ein } 0 < s < 1.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \big|f(y) - f(x) - \omega(x)(y-x)\big| &= \big|\omega(x + s(y-x))(y-x) - \omega(x)(y-x)\big| \\ (\|\cdot\| \text{ Operatornorm }) \quad &\leq \big\|\omega(x + s(y-x)) - \omega(x)\big\| \cdot |y - x| \\ &\leq \underbrace{\sup_{0\leq t\leq 1} \big\|\omega(x + t(y-x)) - \omega(x)\big\|}_{=:R(y)} \cdot |x - y| \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ f ist differenzierbar in x mit $df(x) = \omega(x)$, denn $R(y) \to 0$ bei $y \to x$ wegen der Stetigkeit von ω.

□

Wie prüft man nach, ob ω exakt ist ?

Wegunabhängige Integrierbarkeit ist kein handliches Kriterium.

Definition 26.4 :

Es sei $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\, dx^i$ *eine Differentialform der Klasse* C^1
(d.h. die Koeffizienten ω_i *sind von der Klasse* C^1*).*
ω *heißt* **geschlossen** $:\Longleftrightarrow$ *es gilt die* **Integrabilitätsbedingung**

$$\text{(IB)} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}\,\omega_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\,\omega_i \quad \forall\ i, j}$$

Bemerkungen :

(1) $F : U \to \mathbb{R}^3$, U offen in $\mathbb{R}^3$, sei ein Vektorfeld der Klasse C^1, ω_F die zugehörige 1-Form. Dann gilt:

$$\boxed{\omega_F \text{ geschlossen} \Longleftrightarrow \mathrm{rot} F \equiv 0}$$

(2) Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $\omega = df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx^i$. Dann gilt:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}.$$

Also:

$$\boxed{\omega \text{ exakt mit } f \in C^2 \Longrightarrow \omega \text{ geschlossen}}$$

(3) Uns interessiert die Umkehrung, aber:

$$\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

ist geschlossen auf $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, **aber nicht exakt**.

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial y}\left(-\tfrac{y}{x^2+y^2}\right) &= \tfrac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \tfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{x}{x^2+y^2}\right) &= \tfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \tfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Für die Umkehrung braucht man zusätzliche top Bedingungen an U.

Definition 26.5 :

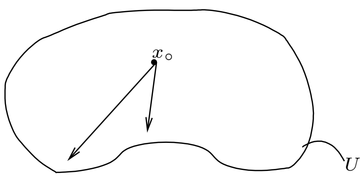
$U \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* **sternförmig** $:\Longleftrightarrow$ *es gibt einen Punkt* $x_\circ \in U$ *mit* $\overrightarrow{x_\circ x} \subset U$ *für alle* $x \in U$.

(man sagt dann: U ist sternförmig bzgl. $x_\circ$).

Bemerkungen :

(1) U konvex $\Longrightarrow U$ sternförmig bzgl. eines beliebigen Punktes

(2) sternförmig ist schwächer als konvex:



sternförmig, aber nicht konvex!

Satz 26.3 :

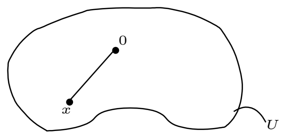
Sei U offen, **sternförmig** *und ω eine* **geschlossene** 1*-Form der Classe C^1.*
Dann ist ω exakt.

Beweis :

Gesucht ist also $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega = df$.

O.E. sei $0 \in U$ und U sternförmig bzgl. 0.

Angenommen, ein solches f existiert.



Sei $\gamma(t) = tx$, $0 \leq t \leq 1$

$\Longrightarrow f(x) - f(0) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\, dt = \int\limits_0^1 df(tx)(x)\, dt = \int\limits_0^1 \omega(tx)(x)\, dt.$

Da offenbar mit f auch $f + c$ Stammfunktion zu ω ist, machen wir den Ansatz

$$f(x) := \int_0^1 \omega(tx)(x)\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) x_i\, dt, x \in U.$$

Z.z.: $df = \omega$ (beachte: (IB) wurde noch nicht benutzt!)

Es gilt:

$$\begin{aligned}
d\big(\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx)x_i\, dt\big) &= \sum_{f=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx)x_i\, dt\big)\, dx^j \\
&\overset{\text{Vertauschung von}}{=} \sum_{j=1}^n \int\limits_0^1 \big\{ \sum_{i=1}^n tx_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(tx) + \omega_i(tx)\delta_{ij} \big\}\, dt\, dx^j \\
&= \sum_{j=1}^n \int\limits_0^1 \big\{ \omega_j(tx) + \sum_{i=1}^n tx_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(tx) \big\}\, dt\, dx^j \\
&\overset{(IB)}{=} \sum_{j=1}^n \int\limits_0^1 \big\{ \omega_j(tx) + \sum_{i=1}^n tx_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(tx) \big\}\, dt\, dx^j
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\frac{d}{dt}(t\omega_j(tx)) = \{\ldots\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} df(x) &= \sum_{j=1}^n \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\big(t\omega_j(tx)\big)\, dt\, dx^j \\ &= \sum_{j=1}^n \omega_j(x)\, dx^j \\ &= \omega(x). \end{aligned}$$

$\square$

Zusammenfassung

U offen in $\mathbb{R}^n$, $\omega\, C^1$ 1- Form

$$\begin{array}{ccc} \omega \text{ exakt} & \overset{26.1}{\Longrightarrow} & \text{alle Umlaufintegrale } 0 \\ \Uparrow 26.3 & & \Updownarrow 26.1 \\ \begin{array}{c}\omega \text{ geschlossen (IB)} \\ + \text{ top. Bedingung an } U\end{array} & & \begin{array}{c}\text{Wegintegrale hängen nur vom} \\ \text{Anfangs- und Endpunkt ab}\end{array} \end{array}$$

andererseits:

(1) ω exakt $\Longrightarrow \omega$ geschlossen (ohne Bedingung an U)
(denn: $\omega = df$ mit $\omega \in C^1$ impliziert $f \in C^2$ und damit (IB) klar!)

(2) alle Umlaufintegrale 0 $+$ U zusammenhängend $\overset{26.2}{\Longrightarrow}$ ω exakt

D.h.:

$$\boxed{U \text{ sternförmig} \quad \Longrightarrow \quad \text{exakt, geschlossen, wegunabhängig integrabel sind äquivalent}}$$

In Termen von Vektorfeldern $F : \mathbb{R}^3 \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ der Klasse C^1 hat man:

$$\boxed{F \text{ konservativ} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{rot} F = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Umlaufintegrale sind } 0}$$

vorausgesetzt U ist sternförmig.

Differentialformen vom Grad $r \geq 1$

Wir erinnern an einige Begriffe aus der Algebra.

Sei V ein $\mathbb{R}$-V.R. Wir setzen für $m \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\bigwedge\nolimits^m V := \Big\{ \Phi : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{m\text{-fach}} \longrightarrow \mathbb{R} \Big|\ \Phi \text{ ist } m\text{-linear und alternierend } \Big\}}$$

Dabei heißt eine m-lineare Abbildung **alternierend**, falls $\Phi(v_1, \ldots, v_m) = 0$ gilt, wenn $v_i = v_j$ ist für mindestens ein Indexpaar $i \neq j$.

Äquivalent dazu ist:

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}) = (\text{sign } \sigma)\Phi(v_1, \ldots, v_m) \text{ für jede Permutation } \sigma \text{ von } \{1, \ldots, m\}$$

oder

$$\Phi(\ldots v \ldots w \ldots) = -\Phi(\ldots w \ldots v \ldots) \text{ bei Vertauschen von zwei Stellen.}$$

Beispiel :

$V = \mathbb{R}^n$, $m = n$

$$\Phi(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_n)$$

ist n-lineare alternierende Abb. in den Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_n$.

Bemerkungen :

(1) Vereinbarung: $\bigwedge^\circ V = \mathbb{R}$

(2) Es gilt $\bigwedge^1 V = V^*$ (Dualraum)

Lemma :

Sei $\Phi : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{m} \longrightarrow \mathbb{R}$ m-linear. Dann sind äquivalent:

(i) Φ ist alternierend

(ii) $\Phi(v_1, \ldots, v_m) = 0$ falls $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig.

Folgerung :

$$\boxed{\dim V = n < m \quad \Longrightarrow \quad \bigwedge^m V = 0,}$$

denn m Vektoren aus V sind ja stets linear abhängig, so dass $\Phi(v_1, \ldots, v_m) = 0$. Mithin ist Φ die Nullabbildung.

Basisdarstellung :

$\dim V = n < \infty$, $e_1, \ldots, e_n$ sei eine Basis von V, $m \leq n$.
Setze für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_1 < \ldots < \alpha_m \leq n$,

$$\Omega^\alpha : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{m} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\begin{cases} \Omega^\alpha(e_{\beta_1}, \ldots, e_{\beta_m}) := \begin{cases} 0 & , \quad \alpha \neq \beta \\ 1 & , \quad \alpha = \beta \end{cases} , \qquad \begin{array}{l} \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m), \\ 1 \leq \beta_1 < \ldots < \beta_m \leq n \end{array} \\ \\ + \ m\text{-lineare, alternierende Fortsetzung} \end{cases}$$

Dann ist $\Omega^\alpha \in \bigwedge^m V$ und es gilt:

$$\{\Omega^\alpha : 1 \leq \alpha_1 < \ldots, < \alpha_m \leq n\}$$

ist eine **Basis von $\bigwedge^m V$**.

Folglich hat $\Phi \in \bigwedge^m V$ die eindeutige Darstellung

$$\boxed{\Phi = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_m \leq n} \Phi_\alpha \cdot \Omega^\alpha}$$

mit Koeffizienten $\Phi_\alpha \in \mathbb{R}$.

□

Korollar:

$$\boxed{\begin{array}{ll} m < n: & \dim V = n \Longrightarrow \dim \bigwedge^m V = \binom{n}{m} \\ \text{Speziell:} & \dim \bigwedge^1 V = \dim V^* = n \\ & \dim \bigwedge^n V = 1 \\ m > n: & \dim \bigwedge^m V = 0. \end{array}}$$

Beispiele :

1) $V = \mathbb{R}^3$, $m = 2 \quad \Longrightarrow \quad \dim \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 = 3.$

   $(e_1, e_2, e_3$ kanonische Basis), dann gilt:

   a) $$\begin{aligned} \Omega^{(1,3)}\big((1,2,3)\,,\,(0,0,1)\big) &= \Omega^{(1,3)}(e_1, e_3) + 2\Omega^{(1,3)}(e_2, e_3) + 3\Omega^{(1,3)}(e_3, e_3) \\ &= \Omega^{(1,3)}(e_1, e_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   b) $\Omega^{(2,3)}\big((0,0,4)\,,\,(0,1,0)\big) = 4\Omega^{(2,3)}(e_3, e_2) = -4.$

2) $V = \mathbb{R}^n$, $m = n \quad \Longrightarrow \quad \dim \bigwedge^n V = 1$

   $e_1, \ldots, e_n$ kanonische Basis

$$\boxed{\Omega^{(1,2,\ldots,n)}(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_n)}$$

   denn:

   $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det(v_1, \ldots, v_n)$ ist Element von $(\bigwedge^n \mathbb{R}^n) - \{0\}$,

   und da $\dim \bigwedge^n \mathbb{R}^n = 1$ ist, folgt $\Omega^{(1,2,\ldots,n)} = a \cdot \det$ mit $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

   Nun werte dies aus auf $(e_1, \ldots, e_n)$, um $a = 1$ zu sehen.

Definition 26.6 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{N}_\circ$, $\ell \in \mathbb{N}_\circ$. Eine Abbildung $\omega : U \longrightarrow \bigwedge^m \mathbb{R}^n$ der Klasse C^ℓ heißt **Differentialform vom Grad m der Klasse C^ℓ auf U**.

Bemerkungen :

(1) $m = 0 \implies$ die Differentialform vom Grad 0 sind die Funktionen $\in C^\ell(U, \mathbb{R})$

(2) $m = 1 \implies$ 1-Formen auf U

(3) für jedes $x \in U$ ist $\omega(x) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{m} \longrightarrow \mathbb{R}$ m-linear und alternierend.

(4) Sei $f \in C^\ell(u, \mathbb{R})$. Dann ist $\omega = f \cdot \det$ eine Differentialform vom Grad n der Klasse C^ℓ.

Wie erzeugt man Differentialformen? $\longrightarrow$ äußeres Produkt

Lemma :

Sei V endlichdimensional. Für r, $s \in \mathbb{N}_\circ$ gibt es einen **eindeutig** festgelegten Operator ("äußeres Produkt")

$$\wedge : \bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \longrightarrow \bigwedge^{r+s} V$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\wedge$ ist **bilinear**:

$(a\omega + b\tilde{\omega}) \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + b(\tilde{\omega} \wedge \eta)$

$\omega \wedge (c\eta + d\tilde{\eta}) = \ldots$

(ii) $\wedge$ ist **assoziativ**:

$\omega \in \bigwedge^r V$, $\eta \in \bigwedge^s V$, $\alpha \in \bigwedge^t V \quad \implies \quad \omega \wedge (\eta \wedge \alpha) = (\omega \wedge \eta) \wedge \alpha.$

(iii) $\wedge$ ist **antikommutativ**:

$\eta \wedge \omega = (-1)^{r \cdot s} \omega \wedge \eta$

(iv) $\bigwedge^0 V \wedge \bigwedge^r V \longrightarrow \bigwedge^r V$ ist gegeben durch

$c \wedge \alpha = c \cdot \alpha.$ (beachte $c \in \mathbb{R}$, da $\bigwedge^0 V = \mathbb{R}$)

Beweis :

Sei $\omega \in \bigwedge^r V$, $\eta \in \bigwedge^s V$. Dann folgt aus (i) - (iv):

$$(*) \quad (\eta \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{r+s}) = \sum_{\sigma \in I_{r,s}} (\mathrm{sign}\sigma) \cdot \eta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}) \cdot \omega(v_{\sigma(r+1)}, \ldots, v_{\sigma(r+s)})$$

wobei $I_{r,s}$ alle Permutationen $\{1, \ldots, r+s\}$ umfaßt, die auf $\{1, \ldots, r\}$ und $\{r+1, \ldots, r+s\}$ streng wachsen.

Nun definiert man $\eta \wedge \omega$ durch $(*)$ und rechnet alle Eigenschaften nach.

$\square$

Bemerkungen :

(1) $(*)$ muß man sich **nicht** merken, aus (i) - (iv) kann man $\eta \wedge \omega$ immer im konkreten Fall ausrechnen ($\to$ s.u.).

(2) $V = \mathbb{R}^n$, $e_1, \ldots, e_n$ Standardbasis, $e^1, \ldots, e^n$ duale Basis

$\Longrightarrow \quad \{e^{\alpha(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\alpha(m)} : 1 \leq \alpha(1) < \ldots < \alpha(m) \leq n\}$ Basis von $\bigwedge^m \mathbb{R}^n$

konkret:

$e^1 \wedge e^2$, $e^2 \wedge e^3$, $e^1 \wedge e^3$ Basis von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$, dann hat $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ die Darstellung

$$\omega = a \cdot e^1 \wedge e^2 + b\, e^2 \wedge e^3 + c\, e^1 \wedge e^3 \text{ mit } a,\, b,\, c \in \mathbb{R}.$$

(3) Beispiel: $V = \mathbb{R}^4 \qquad (a,\, b,\, c \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(a\, e^1 \wedge e^3 + b\, e^2 \wedge e^4) \wedge (c\, e^2 \wedge e^3) &= a \cdot c\, (e^1 \wedge e^3) \wedge (e^2 \wedge e^3) + b \cdot c\, (e^2 \wedge e^4 \wedge e^2 \wedge e^3) \\ &= -a \cdot c\, (e^1 \wedge e^3 \wedge e^3 \wedge e^2) - b \cdot c (e^4 \wedge e^2 \wedge e^2 \wedge e^3) \\ &= 0\,, \quad \text{da } e^i \wedge e^i = 0.\end{aligned}$$

Definition 26.7 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Das **äußere Produkt $\boldsymbol{\eta \wedge \omega}$ von Differentialformen** *wird punktweise erklärt, d.h.*

$$(\eta \wedge \omega)(x) := \eta(x) \wedge \omega(x).$$

Beispiele :

(1) $dx^1, \ldots, dx^n$ waren die konstanten 1-Formen

$$dx^i(x) \equiv e^i.$$

Damit erzeugt man die konstanten m-Formen

$$dx^\alpha := dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_m},\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

die an jeder Stelle x den Wert $e^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge e^{\alpha_m}$ haben.
Ist $\omega : U \longrightarrow \bigwedge^m \mathbb{R}^n$, so kann man schreiben

$$\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha\, dx^\alpha,$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $1 \leq \alpha_1 < \ldots \alpha_m \leq n$.
Die $\omega_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sind die Koeffizientenfunktionen.

(2) auf $\mathbb{R}^3$: $\omega = 2x\,dx \wedge dz$ 2-Form
$\eta = z \cdot dy$ 1-Form

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= 2xz \quad dx \wedge dz \wedge dy \\ &= -2xz \quad dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

Basisdarstellung der 3-Form $\omega \wedge \eta$.

$\square$

Äußere Ableitung (von Differentialformen)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $\omega : U \longrightarrow \bigwedge^m \mathbb{R}^n$ m-Form der Klasse C^ℓ. Da ω Werte in einem Vektorraum endlicher Dimension hat, ist die Bedeutung von $\omega \in C^\ell$ klar. In Termen der Basisdarstellung

$$\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha \, dx^\alpha$$

bedeutet dies: die Koeffizienten ω_α gehören zu $C^\ell(U, \mathbb{R})$. Ist $\ell \geq 1$, so kann man die totale Ableitung $D\omega(a)$ ausrechnen und erhält eine lineare Abb. $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bigwedge^m \mathbb{R}^n$. Es gilt also

$$L(v) \in \bigwedge^m \mathbb{R}^n,$$

so dass

$$L(v)(w_1, \dots, w_m) =: B(v, w_1, \dots, w_m)$$

bildbar ist. B ist $(m+1)$-linear, aber nur schiefsymmetrisch bzgl. der Variablengruppe $w_1, \dots, w_m$. Uns interessieren nun der alternierende Anteil von B, und diesen nennen wir die **äußere Ableitung** $d\omega(a) \in \bigwedge^{m+1} \mathbb{R}^n$ von ω bei a.

Wir geben eine explizite Konstruktion:

(1) f 0-Form der Klasse $C^1(U)$ (also eine C^1-Funktion). **Die äußere Ableitung** df ist die 1-Form (von früher)

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx^i \quad \text{(offenbar: } df \text{ nur noch } C^\circ)$$

(2) $\omega : U \longrightarrow \bigwedge^m \mathbb{R}^n$ m-Form der Klasse C^1, $\omega = \sum_{\alpha_1, < \dots < \alpha_m} \omega_\alpha \, dx^\alpha$

äußere Ableitung :

$$\boxed{d\omega := \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_m} d\omega_\alpha \wedge dx^\alpha} \quad \Longrightarrow \quad d\omega \text{ ist } (m+1)\text{-Form auf } U.$$

Beachte:

(1) gemäß $d\omega_\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_i}\; dx^i$ ist

$$d\omega = \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_i}\; dx^i \wedge dx^\alpha .$$

Dies ist allerdings keine Basisdarstellung, dazu muß man die Produkte $dx^i \wedge dx^\alpha$ erst sortieren.

(2) $m = n \Longrightarrow d\omega \equiv 0$ aus Dimensionsgründen!

(3) $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i\, dx^i$ 1-Form $\quad \Longrightarrow \quad$

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} \left(\tfrac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \tfrac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\right) dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

Man sieht:

die 1-Form ω ist geschlossen (I.B. gilt) $\quad \Longleftrightarrow \quad d\omega = 0$

(4) $n = 3$:

a) $\omega = 4x \cdot dy \wedge dz$

$\Longrightarrow \quad d\omega = 4\, dx \wedge dy \wedge dz \equiv 4 \cdot \det,$ d.h. $\omega(x, y, z) \equiv 4 \cdot \det$

b) $\omega = \sin x \cdot dy + e^z\, dx \quad \Longrightarrow$

$$d\omega = \cos x\;\, dx \wedge dy + e^z dz \wedge dx = \cos x\, dx \wedge dy - e^z dx \wedge dz$$

und

$$\begin{aligned} d\,(d\omega) &= d(\cos x\;\, dx \wedge dy) - d(e^z\;\, dx \wedge dz) \\ &= -sinx\;\, dx \wedge dx \wedge dy - e^z\;\, dz \wedge dx \wedge dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

Für die äußere Ableitung gilt

Satz 26.4 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 \le r,\ s \le n$. Dann gilt:

(i) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ *für C^1 r-Formen ω, η auf U*

(ii) $d(f \cdot \omega) = f\, d\omega + df \wedge d\omega$ *für 0-Formen f, r-Formen ω der Klasse C^1*

(iii) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{grad\,\omega}\, \omega \wedge d\eta$ *für r-Form ω, s-Form η der Klasse C^1*

(iv) $d(d\omega) = 0$ *für r-Formen der Klasse C^2*

Beweis :

Triviale Rechnungen mit der Definition!

z.B. (iv): für Funktionen f ist

$$d(df) = d\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx^i\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

da $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, aber $dx^j \wedge dx^i = -\, dx^i \wedge dx^j$.

Sei $\omega = \sum\limits_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_r} \omega_\alpha \, dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r}$.

Es genügt der Nachweis von

$$d\left(d\{\omega_\alpha dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r}\}\right) = 0 :$$

$$\begin{aligned} d\left(d\{\omega_\alpha dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r}\}\right) &= d\left(d\omega_\alpha \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r}\right) \\ &\overset{\text{(iii)}}{=} \underbrace{(d\, d\omega_\alpha)}_{=0} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r} - d\omega_\alpha \wedge \underbrace{d\,(dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r})}_{=0 \text{ nach Def. von } d} \end{aligned}$$

□

Notation :

Sei ω r-Form der Klasse C^1 auf U.

(1) $\boldsymbol{\omega}$ **geschlossen**: $\iff d\omega = 0$

(2) $\boldsymbol{\omega}$ **exakt**: $\iff \exists\ (r-1)$-Form, Ω mit $\omega = d\Omega$

Offenbar:

ω exakt $\implies \omega$ geschlossen.

Mit analogen Argumenten wie im Beweis von Satz 26.3 kann man zeigen

Satz 26.5 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und **sternförmig**.

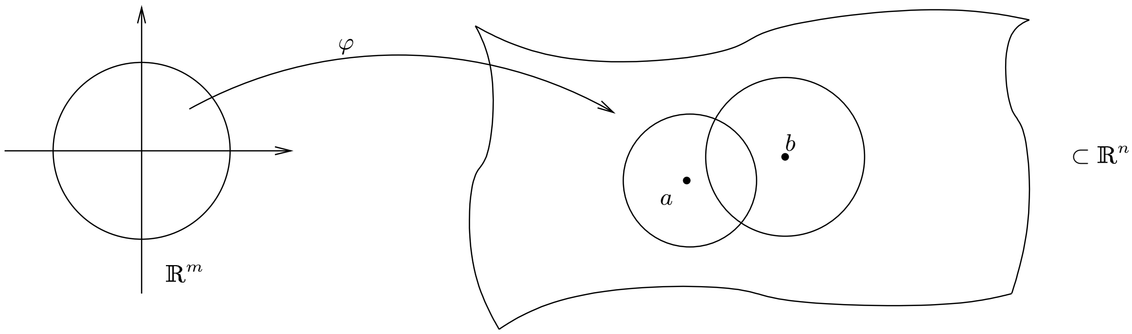
Ist die r-Form ω der Klasse C^1 geschlossen so ist ω exakt.

□

Jetzt zum **Satz von Stokes in einer speziellen Form**. Die allgemeine Version erfordert die genaue Diskussion von berandeten Mannigfaltigkeiten, auf die wir aus Zeitgründen verzichten. (→ Barner - Flohr, Bd. II)

1-Formen lassen sich längs Wegen in $\mathbb{R}^n$ integrieren, also liegt es nahe, **$\boldsymbol{m}$-Formen über $\boldsymbol{m}$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten zu integrieren**.

Sei M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.



Dann wissen wir:

Zu $a \in M$ existieren W_a offen in $\mathbb{R}^m$, U_a offen in $\mathbb{R}^n$ und $\varphi_a : W_a \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regulär mit

$$\varphi_a(W_a) = U_a \cap M.$$

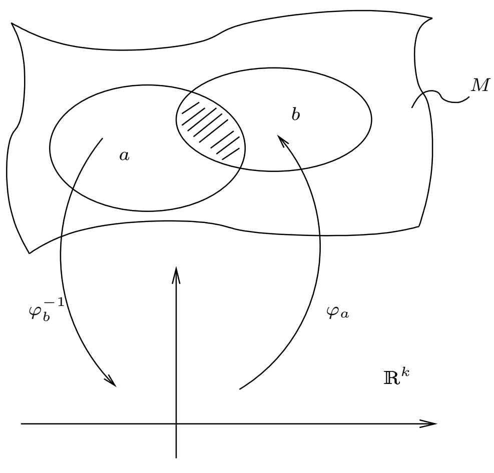
Nun fixiere $a \in M$ und eine Orientierung von T_aM, etwa sei $\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_a, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\varphi_a$ positiv orientierte Basis von $T_xM, x \in M \cap U_a$.

Wenn $M \cap U_a \cap U_t \neq \emptyset$ ist, so kann φ_b dort genau die entgegengesetzte Orientierung induzieren, d.h. $\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_b, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\varphi_b$ ist negativ orientiert oder äquivalent:

$$\det D(\varphi_b^{-1} \circ \varphi_a) < 0.$$

Definition 26.8 :

a) *Kann man die Mannigfaltigkeit M so durch Karten beschreiben, dass auf den Überlappungsbereichen stets* $\det D(\varphi_b^{-1} \circ \varphi_a) > 0$ *gilt, so nennt man M* **orientierbar**.



b) *Ist M orientierbar und a ein Punkt aus M, so wird auf M eine Orientierung O festgelegt, wenn man in T_aM eine Basis auszeichnet und diese positiv nennt. M zusammen mit dieser Orientierung O heißt* **orientierte Mannigfaltigkeit**.

Beispiel : (M Hyperfläche $\subset \mathbb{R}^n$)

Annahme: es gibt ein stetiges Normalfeld $\mathcal{N} : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auf M, d.h. $\mathcal{N}(x) \in T_xM$, $|\mathcal{N}(x)| = 1$.

Wählt man dann in T_xM jeweils $e_1(x), \ldots, e_{n-1}(x)$ so, dass $e_1(x), \ldots, e_{n-1}(x), \mathcal{N}(x)$ zur Standardbasis äquivalent ist, so wird eine Orientierung von M festgelegt. Das Normalfeld $\mathcal{N}$ orientiert M entgegengesetzt.

Definition 26.9 :

Sei (M, O) eine orientierte m-dimensionale Mannigfaltigkeit, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $\supset M$ und $\omega : U \longrightarrow \bigwedge^m \mathbb{R}^n$ stetig. Das **orientierte Integral von $\boldsymbol{\omega}$ über $\boldsymbol{(M, O)}$** *ist*

$$\boxed{\int_{(M,O)} \omega := \int_M \omega(x)\big(\tau_1(x), \ldots, \tau_m(x)\big)\, d\mathcal{H}^m(x)\ .}$$

Ist O festgelegt, so schreibt man kurz $\int_M \omega$.

$\tau_1(x), \ldots, \tau_m(x)$ ist hier eine positive ONB von T_xM.

Bemerkungen

(1) Man muß natürlich sicherstellen, dass $x \mapsto \omega(x)\big(\tau_1(x), \ldots, \tau_m(x)\big)$ auf M $\mathcal{H}^m$- integrierbar oder -summierbar ist!

(2) Wie berechnet man $\int_M \omega$?

Fall 1:

Man kommt mit einer Karte aus: $M = \varphi(W)$, $\varphi : \mathbb{R}^m \supset W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regulär. Ist dann $\partial_1\varphi, \ldots, \partial_m\varphi$ positive Basis, so folgt aus der **Flächenformel** (die Jacobische kürzt sich!)*

$$\int_M \omega = \int_W \omega(\varphi(x))(\partial_1, \varphi, \ldots, \partial_m\varphi)\, d\mathcal{L}^m.$$

Fall 2:

Zerlege M in Stücke M_i (disjunkt), die durch eine Abbildung beschrieben werden und benutze Fall 1 sowie

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{M_i} \omega$$

□

* es ist $\omega\big(\varphi(x)\big)\big(\partial_1\varphi(x) \ldots \partial_m\varphi(x)\big) = [\![D\varphi(x)]\!]\omega\big(\varphi(x)\big)\big(\tau_1(\varphi(x)), \ldots, \tau_m(\varphi(x))\big)$

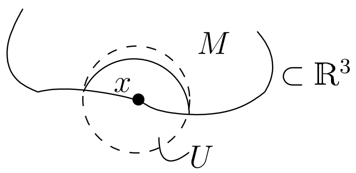
Definition 26.10 :

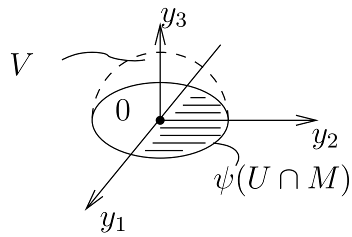
*$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **m-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand**, falls gilt:*
zu jedem $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, so dass

entweder: *$M \cap U$ m- dimensionale Mannigfaltigkeit ist*

oder: *es gibt eine offene Umgebung V von 0 in $\mathbb{R}^n$ sowie einen Diffeomorphismus $\Psi : U \longrightarrow V$ mit $\Psi(x) = 0$ und $\Psi(U \cap M) = \{y \in V : y^{m+1} = \ldots = y^n = 0,\ y^m \geq 0\}$*

"oder": *$\Psi(U \cap M)$ ist für $m = 2$, $n = 3$ im Prinzip eine Halbkreisscheibe in y_1y_2-Ebene, und zwar im Bereich $y^2 \geq 0$*





Definition 26.11 :

Ist M Mannigfaltigkeit mit Rand, so setzt man $\partial M := \{x \in M :$es gilt "oder" $\}$, und nennt diese Menge den ***Rand von M**.*

Achtung : ∂M ist **nicht** der topologische Rand von M !

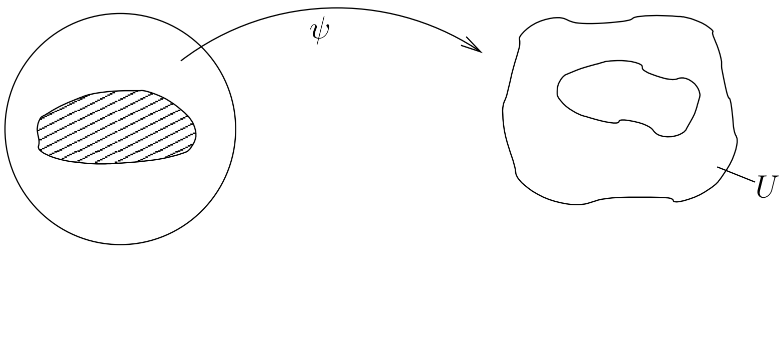
Offenbar: $M - \partial M$ ist Mannigfaltigkeit im alten Sinn.

Beispiel :

$\Psi : \{z \in \mathbb{R}^n : |z| < 1\} \longrightarrow U$ Diffeom. der 1-Kugel auf eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow$ $M := \Psi\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r,\ x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}\big)$
ist Mannigfaltigkeit der Dim. m mit Rand, sofern $r < 1$.

$$\partial M = \Psi\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r,\ x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}\big)$$

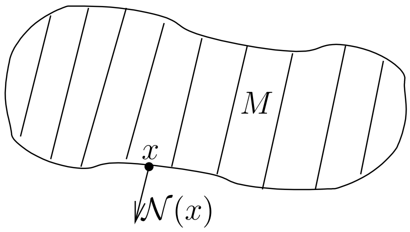


Bemerkung :

M Mannigfaltigkeit der Dim. m mit Rand	$\Longrightarrow$	∂M Mannigfaltigkeit der Dim. $m-1$.

Es gilt:

$$T_x \partial M \subset T_x M.$$



Sei M **orientierte** Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei $x \in \partial M$. Dann gibt es in $T_x M$ genau 2 Vektoren η_1, η_2 der Länge 1 mit $\eta_i \in T_x\, \partial M^\perp$. η_1 und η_2 sind entgegengerichtet, d.h. $\eta_2 = -\eta_1$, und sie bilden anschaulich den inneren und den äußeren Normalenvektor an ∂M.

Definition 26.12 :

Sei $\mathcal{N}(x)$ *der* **äußere Normalenvektor** *an* ∂M.

Eine ONB $\tau_1(x), \ldots, \tau_{m-1}(x)$ *von* $T_x \partial M$ *heißt* **positiv**	$\Longleftrightarrow$	$\tau_1(x), \ldots, \tau_{m-1}(x)$, $\mathcal{N}(x)$ *ist* **positive** *Basis von* $T_x M$.

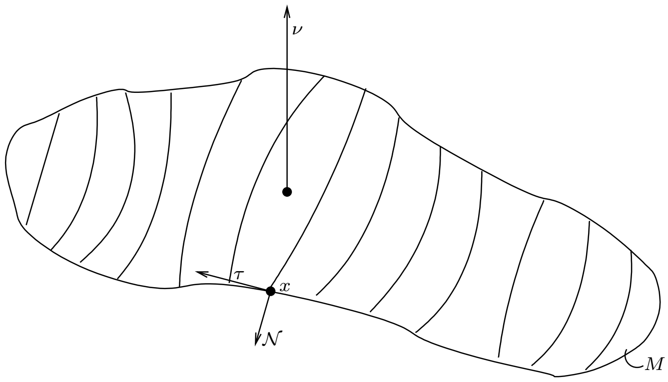
Dadurch wird ∂M *orientiert, man nennt diese Orientierung die* **induzierte Orientierung** $\boldsymbol{O'}$.

Theorem : Stokes

Sei (M, O) orientierte berandete m-Mannigfaltigkeit, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U \supset M$ und $\omega : U \longrightarrow \bigwedge^{m-1} \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1. Dann gilt:

$$\int_{(M,O)} d\omega = \int_{(\partial M O')} \omega$$

<u>Spezialfall</u>: $\boldsymbol{n = 3,\ m = 2}$



M habe ein Normalenfeld ν

Orientierung O:	$v_1, v_2 \in T_xM$ positiv	$\Longleftrightarrow$	v_1, v_2, ν positive Basis von $\mathbb{R}^3$
Orientierung O':	$\tau \in T_x\partial M$ positiv	$\Longleftrightarrow$	$\tau, \mathcal{N}$ positive Basis von T_xM
		$\Longleftrightarrow$	$\tau, \mathcal{N}, \nu$ positive Basis von $\mathbb{R}^3$

Dann:

$$\omega \text{ 1-Form der Klasse } C^1 \text{ auf Umg. von } M \quad \Longrightarrow \quad \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (*)$$

Rechts steht jetzt ein Linienintegral!

Da 1-Formen und Vektorenfelder F isomorph sind, folgt aus $(*)$ der **klassische Satz von Stokes**

$$\int_M \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial M} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1.$$