

Analysis III

WS 2012/13

M. Fuchs

Inhalt

- 20** Höhere Ableitungen, Satz von Taylor, Extremwerte, Konvexität
- 21** Umkehrsatz, Implizite Funktionen
- 22** Gewöhnliche Differentialgleichungen
- 23** Maßtheorie
- 24** Meßbare Funktionen
- 25** (Lebesgue -) Integration
- 26** Vektoranalysis: Kurvenintegrale von Vektorfeldern und 1- Formen,
die Sätze von Gauß und Stokes

20

Höhere Ableitungen, Satz von Taylor, Extremwerte, Konvexität

Höhere Ableitungen werden rekursiv definiert.

$$\text{Situation : } \begin{cases} X, Y \text{ endlich dim. } \mathbb{R}\text{-V.R. , } U \text{ offen } \subset X \\ f : U \rightarrow Y \text{ differenzierbar} \end{cases}$$

Dann definiert f' eine Abbildung $U \rightarrow L(X, Y)$, die jedem $x \in U$ eine **lineare** Abbildung $X \rightarrow Y$ zuordnet.

Definition 20.1 : (**2^{te} Ableitung**)

a) Ist f' diff'bar an einer Stelle $a \in U$, so heißt $(f')'(a)$ die **2^{te} Ableitung** von f in a .

b) f heißt auf U **2mal diff'bar**, wenn $(f')'(a)$ an jeder Stelle $a \in U$ existiert.

Schreibweise: $f''(a)$ oder $f^{(2)}(a)$ statt $(f')'(a)$ bzw. $D^2 f(a)$

Interpretation von $f''(a)$:

Sei $Z = L(X, Y) \xrightarrow{\text{per Def}} f''(a) : X \rightarrow Z$ linear, also $f''(a) \in L(X, Z) = L(X, L(X, Y))$.

D.h.: $\left\{ \begin{array}{l} \text{für jeden Vektor } v \in X \text{ ist } f''(a)(v) \text{ eine lineare Abbildung } X \rightarrow Y, \\ \text{kann also nochmal auf einen Vektor } w \in X \text{ angewendet werden.} \\ (f''(a)(v))(w) \text{ ist dann ein Element von } Y. \end{array} \right.$

Man schreibt: $f''(a)(v, w)$ und interpretiert $f''(a)$ als Bilinearform $X \times X \rightarrow Y$

Bemerkungen :

- 1) $(f''(a)(v))(w)$ ist offenbar linear in v und w .
- 2) Wir geben gleich Formeln für diesen Ausdruck an.

Rekursive Definition von k-maliger Differenzierbarkeit:

$U \subset X$ offen, Y \mathbb{R} -V.R., $\dim X, \dim Y < \infty$ wobei $Y_\ell := L(X, Y_{\ell-1})$, $Y_0 := Y$.
 (beachte: Y_ℓ ist für alle ℓ endlich dim. \mathbb{R} -Vektorraum)
 setze nun: $f^{(\ell)} := (f^{(\ell-1)})' : U \rightarrow Y_\ell$

Definition 20.2 :

$$\begin{aligned}
 C^0(U, Y) &:= \{f : U \rightarrow Y \mid f \text{ stetig}\}, \\
 C^1(U, Y) &:= \{f : U \rightarrow Y \mid f' \text{ existiert und ist stetig}\}, \\
 C^k(U, Y) &:= \{f : U \rightarrow Y \mid f^{(k)} \text{ existiert und ist stetig}\}, \\
 C^\infty(U, Y) &:= \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U, Y).
 \end{aligned}$$

Man kann sich (mit Induktion!) überlegen:

$| f^{(k)}(a)$ kann aufgefaßt werden als k -lineare Abbildung $X \times \dots \times X \rightarrow Y$.

Kehren wir zurück zu $f''(a) : X \times X \rightarrow Y$.

Wir hatten definiert $(f''(a) \text{ ist lin. Abb. } X \rightarrow L(X, Y))$

$$f''(a)(v, w) := \left(\underbrace{f''(a)(v)}_{\in L(X, Y)} \right)(w),$$

und es sieht so aus, als ob man die Reihenfolge von v, w beachten müßte. Dem ist nicht so!

Satz 20.1 :

Sei $f : X \supset U \rightarrow Y$ 2-mal (total !) diff'bar in $a \in U$. Dann gilt für alle $v, w \in X$:

$$\boxed{f''(a)(v, w) = \partial_w(\partial_v f)(a) = \partial_v(\partial_w f)(a) = f''(a)(w, v)}$$

(Das ist einerseits eine Formel zur Berechnung von $f''(a)(v, w)$ mit Richtungsableitungen, andererseits bekommt man Vertauschbarkeit der Reihenfolge)

$f''(a)$ ist also eine **symmetrische Bilinearform**.

[zur Erinnerung : $\partial_u f(x) = \frac{d}{dt}\big|_0 f(x + tu) = f'(x)u$]

Korollar :

Sei f **k -mal diff'bar** auf U . Dann ist $f^{(k)}(a) : X \times \dots \times X \rightarrow Y$ k -linear und **symmetrisch**. Es gilt:

$$f^{(k)}(a)(v_1, \dots, v_k) = \underbrace{\partial_{v_k}(\partial_{v_{k-1}}(\dots(\partial_{v_1}f)\dots))}_{k\text{-fach iterierte Richtungsabl.}}(a).$$

Bemerkungen :

1) **Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen im Euklidischen Fall**

Seien $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$. Dann wissen wir:

Existenz nur von $\partial_i(\partial_j f)$ auf U für alle $i, j \not\Rightarrow \partial_i(\partial_j f) = \partial_j(\partial_i f)$ (vgl. Analysis II)

Satz 20.1 zeigt dagegen:

$$f^{(2)}(x) \text{ existiert} \Rightarrow \partial_i(\partial_j f)(x) = \partial_j(\partial_i f)(x) \quad \forall i, j$$

Wenn also in x die (totale) 2^{te} Ableitung existiert, so kann man bei allen 2^{ten} partiellen Ableitungen die Reihenfolge beliebig ändern.

| Dasselbe gilt sinngemäß für k -mal diff'bare Funktionen und k -fache partielle Ableitungen.

2) **Wie berechnet man $f''(x)$ im Euklidischen Fall ?**

Sei $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}$ (f \mathbb{R}^m -wertig : analog!).

Nach unserer Interpretation ist $f''(a)$ eine **Bilinearform** auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$\{e_1, \dots, e_n\} =$ kanonische Basis;

$$v, w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = \sum_{i=1}^n v_i e_i, w = \sum_{k=1}^n w_k e_k$$

Damit:
$$f''(a)(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_k \partial_i(\partial_k f)(a)$$

Also: $f''(a)$ **entspricht der symmetrischen Matrix**

$$\left(\partial_i(\partial_k f)(a) \right)_{1 \leq i, k \leq n} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a) \right)_{1 \leq i, k \leq n}, \text{ der sogenannten } \mathbf{Hesse-Matrix}.$$

Für $f^{(k)}(a), k > 2$, bildet man eine entsprechende "Multimatrix".

3) **Kriterien für die Existenz von $f^{(k)}(a)$:** s. Satz 20.2
(in Termen k^{ter} partieller Ableitungen)

□

Beweis von 20.1 :

$f : U \rightarrow Y$ sei 2^{mal} diff'bar in a , d.h. (Def. von $f''(a)$)

$$(1) \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{|v|} \underbrace{\left| f'(a+v) - f'(a) - f''(a)(v) \right|}_{\in L(X,Y)!} = 0, \text{ wobei } f''(a) : X \rightarrow L(X, Y) \text{ linear.}$$

Setze R_a : Nullumgebung in $X \rightarrow L(X, Y)$,

$$R_a(v) := \begin{cases} 0, & v = 0 \\ \frac{1}{|v|} (f'(a+v) - f'(a) - f''(a)v), & v \neq 0 \end{cases}$$

Gemäß (1) ist R_a stetig in 0, und wir können schreiben

$$(2) \quad f'(a+v) - f'(a) - f''(a)v = |v|R_a(v)$$

Seien jetzt $u, v \in X$ beliebig. Für $t \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \left\{ (\partial_u f)(a+tv) - (\partial_u f)(a) \right\} \\ \stackrel{\partial_u f(x) \equiv f'(x)u}{=} & \frac{1}{t} \left\{ f'(a+tv)(u) - f'(a)(u) \right\} \\ (2) \text{ mit } \frac{tv}{=} \text{ statt } v & \frac{1}{t} \left\{ |tv|R_a(tv)(u) + f''(a)(tv)(u) \right\} \\ \text{Linearität von } \frac{f''(a)(\dots)(u)}{=} & |v| \cdot R_a(tv)(u) + f''(a)(v)(u). \end{aligned}$$

Also existiert $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ (\partial_u f)(a+tv) - (\partial_u f)(a) \right\}$, mit Wert $f''(a)(v)(u)$.

Es folgt nach Def. der Richtungsableitung

$$(3) \quad \partial_v(\partial_u f)(a) = f''(a)(v)(u)$$

und analog

$$(4) \quad \partial_u(\partial_v f)(a) = f''(a)(u)(v).$$

Zum Beweis der Symmetrie argumentieren wir heuristisch:

$$\begin{aligned} \partial_v(\partial_u f)(a) & \approx \frac{1}{t} \left\{ (\partial_u f)(a+tv) - (\partial_u f)(a) \right\} \\ & \approx \frac{1}{t} \left\{ \frac{1}{s} \left[f(a+tv+su) - f(a+tv) \right] - \frac{1}{s} \left[f(a+su) - f(a) \right] \right\} \\ \stackrel{\text{setze } s=t}{=} & \frac{1}{s^2} \left\{ f(a+su+sv) - f(a+su) - f(a+sv) + f(a) \right\} \\ =: & \frac{1}{s^2} \cdot B_a(sv, su) \end{aligned}$$

$$\boxed{B_a(\tilde{u}, \tilde{v}) := f(a + \tilde{u} + \tilde{v}) - f(a + \tilde{u}) - f(a + \tilde{v}) + f(a)}$$

Der Ausdruck $B_a(\tilde{u}, \tilde{v})$ ist symmetrisch in \tilde{u} und \tilde{v} , so dass $f''(a)(u)(v) = f''(a)(v)(u)$ und damit alles streng bewiesen ist wenn wir

$$(5) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} B_a(su, sv) = f''(a)(v)(u) \quad \text{zeigen können.}$$

zu (5) :

O.E. f \mathbb{R} -wertig (sonst wähle Basis in Y und betrachte die Komponenten von f).
Seien $u, v \in X$, $\delta > 0$ sei so klein, dass für $0 < s < \delta$: $a + su$, $a + sv$, $a + s(u+v) \in U$.
Sei ein $s \in (0, \delta)$ fixiert, $\tilde{u} := su$, $\tilde{v} := sv$.

Setze $F(t) := f(a + t\tilde{u} + \tilde{v}) - f(a + t\tilde{u})$ für $0 \leq t \leq 1$.

$$\implies F'(t) = f'(a + t\tilde{u} + \tilde{v})(\tilde{u}) - f'(a + t\tilde{u})(\tilde{u})$$

$$\xrightarrow{MWS} F(1) - F(0) = B_a(su, sv) = F'(\vartheta) \text{ für ein } 0 < \vartheta < 1$$

Also:

$$\begin{aligned} B_a(su, sv) &= f'(a + \vartheta\tilde{u} + \tilde{v})(\tilde{u}) - f'(a + \vartheta\tilde{u})(\tilde{u}) \\ &= f'(a + \vartheta\tilde{u} + \tilde{v})(\tilde{u}) - f'(a)(\tilde{u}) - \left(f'(a + \vartheta\tilde{u})(\tilde{u}) - f'(a)(\tilde{u}) \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} |\vartheta\tilde{u} + \tilde{v}| \cdot R_a(\vartheta\tilde{u} + \tilde{v})(\tilde{u}) + f''(a)(\vartheta\tilde{u} + \tilde{v})(\tilde{u}) \\ &\quad - \left(|\vartheta\tilde{u}| \cdot R_a(\vartheta\tilde{u})(\tilde{u}) + f''(a)(\vartheta\tilde{u})(\tilde{u}) \right) \\ &= f''(a)(\tilde{v})(\tilde{u}) + |\vartheta\tilde{u} + \tilde{v}| R_a(\vartheta\tilde{u} + \tilde{v})(\tilde{u}) - |\vartheta\tilde{u}| R_a(\vartheta\tilde{u})(\tilde{u}) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Bilinearität von } f''(a) \\ &\quad \downarrow \\ &= s^2 \left\{ f''(a)(v)(u) + |\vartheta u + v| R_a(\vartheta\tilde{u} + \tilde{v})(u) - |\vartheta u| R_a(\vartheta\tilde{u})(u) \right\} \\ \implies \frac{1}{s^2} B_a(su, sv) &= f''(a)(v)(u) + |\vartheta u + v| R_a(\vartheta\tilde{u} + \tilde{v})(u) - |\vartheta u| R_a(\vartheta\tilde{u})(u) \end{aligned}$$

und man erhält $\lim_{s \downarrow 0} s^{-2} B_a(su, sv) = f''(a)(v)(u)$

gemäß $\lim_{w \rightarrow 0} R_a(w) = 0$.

□

Satz 20.2 : (Kriterium für k-fache stetige Diff'barkeit)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

$f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ (d.h. $f^{(1)}, \dots, f^{(k)}$ existieren auf U und sind stetig)

\Updownarrow

für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq k$, existieren die partiellen Ableitungen

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \left(\dots \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f \right) \dots \right) \right)$$

und sind **stetig** auf U ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$)

Beweis : (Induktion über k)

Satz 18.4 ergibt den Induktionsanfang für $k = 1$.

□

Beispiel :

Polynome und **rationale** Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind auf ihrem Definitionsbereich unendlich oft differenzierbar.

Als Anwendung des Konzepts der höheren Ableitung diskutieren wir nun

Taylor Formel für reellwertige Funktionen.

Satz 20.3 : (wird in der Extremwertdiskussion eingesetzt, s.u.)

Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f \in C^{\ell+1}(U, \mathbb{R})$ für ein $\ell \geq 1$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $a + tv \in U$ für alle $0 \leq t \leq 1$, $a \in U$ fixierter Punkt.

Dann gilt:

$$f(a + v) = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \underbrace{(v, \dots, v)}_{k \text{ fach}} + R_{a,\ell}(v)$$

mit dem **Restglied**

$$R_{a,\ell}(v) = \frac{1}{(\ell+1)!} f^{(\ell+1)}(a + \vartheta v) \underbrace{(v, \dots, v)}_{\ell+1 \text{ fach}}$$

an einer geeigneten Zwischenstelle $\vartheta \in (0, 1)$.

Bemerkungen :

1) $f^{(k)}(b)$, $b \in U$ ist eine k -lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $f^{(k)}(b)(w, \dots, w)$ heißt, k -mal den selben Vektor w in diese Form einzutragen.

(Erinnerung : $f^{(k)}(b) = \partial_w(\partial_w \dots (\partial_w f) \dots)(b) = \frac{d^k}{dt^k}|_0 f(b + tw)$)

2) Es gilt folgende **Integraldarstellung des Restglieds**:

$$R_{a,\ell}(v) = \frac{1}{\ell!} \int_0^1 (1-t)^\ell f^{(\ell+1)}(a+tv)(v, \dots, v) dt$$

3) $f \in C^\infty(U) \implies$ die **formale Taylorreihe** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a, \dots, x-a)$, $x \in U$
mit Entwicklungsmitte a ist bildbar

4) f heißt **reell analytisch auf U** : \iff jeder Punkt $a \in U$ hat eine Umgebung, auf der die formale Taylorreihe gegen f konvergiert

Beweis von Satz 20.3 :

Benutze die Taylorformel für $F(t) := f(a+tv)$, $0 \leq t \leq 1 \implies F(1) = \dots$. Die Integraldarstellung 2) folgt aus der Darstellung des Restglieds von F .

□

Lokale Extrema :**Definition 20.3 :**

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$

a) Ist f auf U differenzierbar, so heißt $a \in U$ **kritischer Punkt von f** ,

wenn $f'(a) = 0$ ist, also $\nabla f(a) = 0$ (da $f'(a)v = \langle \nabla f(a), v \rangle$)

b) $a \in U$ heißt **lokales Maximum (Minimum)** von f

\iff

$\exists r > 0 : f(x) \leq (\geq) f(a)$ für alle $x \in B_r(a)$

(“strikt”, wenn $< (>)$ für $x \in B_r(a) - \{a\}$)

Satz 20.4 :

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $a \in U$ lokales Max. (Min.).
Dann ist a kritischer Punkt.

allgemeiner:

a lokaler Extremwert
 $\implies \partial_v f(a) = 0$ für jede Richtung v , für die $\partial_v f(a)$ existiert.

Bemerkung :

$$\nabla f(a) = 0 \not\Rightarrow a \text{ lokaler Extremwert (ist ja schon falsch f\u00fcr } n = 1, x \mapsto x^3)$$

Beweis von Satz 20.4 :

Sei a lokales Max \implies

$$f(a + tv) \leq f(a) \quad \forall |t| \text{ klein genug}$$

$$\text{Also: } \frac{1}{t} (f(a + tv) - f(a)) \begin{cases} \geq 0, & t < 0 \\ \leq 0, & t > 0 \end{cases} \implies \partial_v f(a) = 0.$$

Ist f diff'bar in a , so folgt $\partial_v f(a) = 0$ f\u00fcr alle v , d.h. $f'(a) = 0$.

□

Beispiel :

$f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$ auf $U = \mathbb{R}^2$ f ist beliebig oft diff'bar:

$$\text{Kritische Punkte : } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x \stackrel{!}{=} 0$$

$$\implies (0, 0), (1, 1) \text{ als L\u00f6sungen.}$$

in $(0, 0)$ liegt kein lokaler Extremwert vor:

$$\text{es ist } f(x, 0) = x^3 > 0 \text{ f\u00fcr } x > 0 \\ < 0 \text{ f\u00fcr } x < 0$$

d.h. f nimmt in jeder Umgebung von $(0, 0)$ sowohl positive als auch negative Werte an.

f hat keine absoluten Extremwerte:

$$\left. \begin{array}{l} f(n, 0) = n^3 \longrightarrow \infty, \\ f(-n, 0) = -n^3 \longrightarrow -\infty \end{array} \right\} \text{ bei } n \rightarrow \infty$$

Was passiert in $(1, 1)$?

Um dies zu entscheiden, formulieren wir Kriterien mit der 2^{ten} Ableitung.

Einschub aus der Algebra :

$X = \mathbb{R}$ - V.R. endlicher Dimension,

$B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform ($B(u, v) = B(v, u)$)

$Q(v) := B(v, v)$ zugehörige quadratische Form.

Es gilt:

$$\left| \begin{array}{ll} Q \text{ positiv (negativ) definit} & :\iff Q(v, v) > 0 (< 0) \quad \forall v \neq 0 \\ \dots\dots\dots (\dots) \text{ semidefinit} & :\iff Q(v, v) \geq 0, Q(w, w) < 0 \quad \forall v \\ Q \text{ indefinit} & :\iff \exists v, w \neq 0 \text{ mit } Q(v, v) > 0, Q(w, w) < 0 \end{array} \right.$$

(man sagt auch: B ist ... definit und meint das zugehörige Q)

Sei $X = \mathbb{R}^n$, A eine symmetrische $(n \times n)$ - Matrix, d.h. $\langle v, Aw \rangle = \langle Av, w \rangle \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

bilde $B(v, w) := \langle v, Aw \rangle \xrightarrow{\text{Bilinearform (symm.!)}} Q(v) = \langle v, Av \rangle$

Wie entscheidet man, ob dieses Q definit ist?

Betrachte dazu:

A symmetrisch $\implies \exists$ Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n aus *Eigenvektoren*
(also: $Av_i = \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$)

schreibe nun $w \in \mathbb{R}^n$ als $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \implies Q(w) = \langle w, Aw \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle v_i, Av_j \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i$,

und damit kann man sich sehr leicht überlegen, dass gilt:

$$\left| \begin{array}{ll} Q \text{ positiv (negativ) definit} & \iff \text{alle EW von } A \text{ positiv (negativ)} \\ \text{''} \quad \text{semidefinit} & \iff \dots\dots\dots \geq 0 (\leq 0) \\ Q \text{ indefinit} & \iff \exists \text{ EW } > 0 \text{ und } < 0 \end{array} \right.$$

→ Wie schlägt man die Brücke zu lokalen Extremwerten?

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, U offen $\subset \mathbb{R}^n$, von der Klasse C^2 , a ein Punkt aus U . Dann gilt:

$$f''(a)(v, w) = \sum_{i,j=1}^n v_i w_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \left\langle v, \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}}_A w \right\rangle$$

mit *symmetrischer Matrix* A (Hesse-Matrix).

Nach Taylor ist:

$$\begin{aligned} f(a+v) &= f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle + \frac{1}{2} f^{(2)}(a+\vartheta v)(v, v) \\ &= f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle + \frac{1}{2} f^{(2)}(a)(v, v) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(f^{(2)}(a+\vartheta v)(v, v) - f^{(2)}(a)(v, v) \right) \quad \text{mit } \vartheta \in (0, 1). \end{aligned}$$

Gemäß Voraussetzung ist $f^{(2)} : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ **stetig**, woraus unschwer folgt (\rightarrow Übung!)

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} \sup_{|w|=1} \left| f^{(2)}(x)(w, w) - f^{(2)}(a)(w, w) \right| = 0$$

Sei nun a **kritischer Punkt** ($\nabla f(a) = 0$) und $f^{(2)}(a)$ **positiv** definit. Dann folgt

$$(2) \quad \min_{|w|=1} f^{(2)}(a)(w, w) =: c_0 > 0.$$

(wegen der Stetigkeit von $w \mapsto f^{(2)}(a)(w, w)$ und der Kompaktheit von $\{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1\}$)

Für $v \neq 0$ folgt nach (2)

$$\begin{aligned} f(a+v) - f(a) &= \frac{1}{2} f^{(2)}(a)(v, v) + \frac{1}{2} \left(f^{(2)}(a+\vartheta v)(v, v) - f^{(2)}(a)(v, v) \right) \\ &\geq \frac{1}{2} |v|^2 c_0 - \frac{1}{2} |v|^2 \sup_{|w|=1} \left| f^{(2)}(a+\vartheta v)(w, w) - f^{(2)}(a)(w, w) \right|. \end{aligned}$$

Wählt man $|v| < \delta$ mit passendem δ , so kann man gemäß (1)

$$\sup_{|w|=1} |\dots| \leq \frac{1}{2} c_0$$

erreichen, also

$$f(a+v) - f(a) \leq \frac{1}{4} c_0 |v|^2 \quad \forall |v| < \delta.$$

f hat also in a ein strenges lokales Minimum. \implies

Satz 20.5 :

Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$, und a kritischer Punkt von f . Dann gilt:

- i) $f''(a)$ **positiv definit** $\implies a$ ist striktes lokales **Min.**
- ii) $f''(a)$ **negativ definit** \implies " **Max.**
- iii) $f''(a)$ **indefinit** $\implies a$ ist **keine lokale Extremstelle**

Beweis :

(i), (ii) \checkmark

(iii) $f''(a)$ indefinit $\implies \exists$ Vektoren u_o, v_o mit Länge 1 und

$$f^{(2)}(a)(u_o, u_o) < 0 < f^{(2)}(a)(v_o, v_o)$$

Daraus folgt für $|t| \neq 0$ klein (diskutiere $t \mapsto f(a + tu_o)$, $f(a + tv_o)$ als Fkt. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

$$f(a + tu_o) - f(a) < 0 < f(a + tv_o) - f(a),$$

also kein Extremwert in a .

□

Bemerkung :

Die Kriterien sind nur hinreichend! $f : t \mapsto t^4$ hat absolutes Min. in 0, $f''(0) = 0$.

Korollar :

Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann gilt:

a lokales Max. (Min.) $\implies f''(a)$ negativ (positiv) **semidefinit**

Beweis :

Sei a Max. $f''(a)$ nicht negativ semidefinit

$\implies \exists v_o, |v_o| = 1$ mit $f''(a)(v_o, v_o) < 0$

$\implies t \mapsto f(a + tv_o) = \varphi(t)$ erfüllt $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi''(0) = f''(a)(v_o, v_o) > 0$

$\implies f(a) < f(a + tv_o)$ für $|t| \neq 0$ klein genug, Wsprr.!

□

Beispiel :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \text{ in } (1, 1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3 \implies f^{(2)}(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Zeige (\rightarrow Übung):

$$\left| \begin{array}{ll} \text{Eine symmetrische } 2 \times 2 \text{ Matrix } \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ ist} \\ \text{positiv definit} & \iff a > 0 \text{ und } \det > 0 \\ \text{negativ definit} & \iff a < 0 \text{ und } \det > 0 \\ \text{indefinit} & \iff \det < 0 \end{array} \right.$$

hier: $a = 6 > 0$, $\det = 27 > 0 \implies \underline{(1, 1) \text{ lok. Min.}}$

Bemerkung :

Die Matrix $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a) \right)_{1 < i, j \leq n}$ heißt Hesse-Matrix von f bei a .

Kriterien für Konvexität:

Erinnerung :

$U \subset \mathbb{R}^n$ konvex; $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ konvexe Funktion \iff

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x, y \in U, 0 \leq t \leq 1$$

(streng konvex, konkav ...)

Satz 20.6 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diff'bar. Dann gilt:

- Graph davon ist Ebene in \mathbb{R}^{n+1} durch $(x_o, f(x_o))$ "Stützebene"*
- (i) f konvex $\iff f(x) \geq \overbrace{f(x_o) + \langle \nabla f(x_o), x - x_o \rangle}^{\text{Stützebene}}$ für alle $x, x_o \in U$
- (ii) f streng konvex $\iff >$ analog für alle $x \neq x_o$
- (iii) konkav (streng) analog

Beweis : nur (i)

“ \implies ”: Sei f konvex.

Mit $v := x - x_0$, $t \in (0, 1)$ ist $f(x_0 + tv) \leq t f(x_0 + v) + (1 - t) f(x_0)$

$$\implies \frac{1}{t} \left(f(x_0 + tv) - f(x_0) \right) \leq f(x_0 + v) - f(x_0)$$

und mit $t \downarrow 0$: $\langle \nabla f(x_0), v \rangle \leq f(x) - f(x_0)$

“ \impliedby ”: Wir wissen jetzt: $f(y+w) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), w \rangle \quad \forall y \in U, y+w \in U.$

Seien $x_1 \neq x_2$ aus U , $t \in (0, 1)$

setze $x_0 := t \cdot x_1 + (1 - t) x_2$, $v := x_1 - x_0$

$$\text{dann: } f(x_0 + v) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), v \rangle \iff$$

$$(1) \quad f(x_1) \geq f\left(tx_1 + (1-t)x_2\right) + \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

$$\text{analog: } f(x_2) = f\left(x_0 + \left[-\frac{t}{1-t} \cdot v\right]\right) \geq f(x_0) - \frac{t}{1-t} \langle \nabla f(x_0), v \rangle \implies$$

$$(2) \quad f(x_2) \geq f\left(tx_1 + (1-t)x_2\right) - \frac{t}{1-t} \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

Nun multipliziere (1) mit t , (2) mit $(1 - t)$ und addiere die Resultate.

□

Für C^2 -Funktionen läßt sich Konvexität, etc., einfach prüfen.

Satz 20.7 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f \in C^2(U)$

(i) f konvex $\iff f^{(2)}(x)$ positiv semidefinit für alle x

(ii) $f^{(2)}$ positiv definit auf $U \implies f$ streng konvex

(iii) “konkav”

(iv) “konkav”

Bemerkung :

Umkehrung in (ii) falsch bereits für $n = 1$: $t \mapsto t^4$, $t \in \mathbb{R}$, ist streng konvex.

Beweis : nur (i)

“ \Leftarrow ”:

Wähle $x_o \neq x$ aus $U \stackrel{\text{Taylor}}{\implies}$ es existiert $\vartheta \in (0, 1)$, so dass gilt:

$$f(x) = f(x_o) + \langle \nabla f(x_o), x - x_o \rangle + \frac{1}{2} f''(x_o + \vartheta(x - x_o))(x - x_o, x - x_o)$$

nach Vor. ist $f''(\dots)(x - x_o, x - x_o) \geq 0$

also $f(x) \geq f(x_o) + \langle \nabla f(x_o), x - x_o \rangle$; nun benutze 20.6 .

“ \implies ”:

 (indirekt)

$f^{(2)}$ **nicht** positiv semidefinit auf U

$\implies \exists x_o \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, mit

$$f^{(2)}(x_o)(v, v) < 0.$$

Da $f^{(2)}$ auf U stetig ist, gibt es $B_\delta(x_o) \subset U$ mit

$$f^{(2)}(y)(v, v) < 0 \quad \forall y \in B_\delta(x_o). \quad (*)$$

Wähle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|t \cdot v| < \delta$

und setze $w := tv$, $x := x_o + w \in B_\delta(x_o) \stackrel{\text{Taylor}}{\implies}$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_o) + \langle \nabla f(x_o), w \rangle + \int_0^1 (1-s) f^{(2)} \overbrace{(x_o + sw)}^{\in B_\delta(x_o)}(w, w) ds \\ &= f(x_o) + \langle \nabla f(x_o), w \rangle + t^2 \int_0^1 (1-s) f^{(2)}(x_o + sw)(v, v) ds \\ &\stackrel{(*)}{<} f(x_o) + \langle \nabla f(x_o), w \rangle. \end{aligned}$$

Da f konvex ist, widerspricht dies 20.6 i).

□

→ Übungen: weitere Beispiele!