Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 1 (WiSe 2016/17)
2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2=10P) Seien X, Y zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass für Teilmengen $A, B \subseteq X$ und $A', B' \subseteq Y$ gilt:

a) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

c) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

d) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

Gilt in a) Gleichheit? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Aufgabe 2 (5+3+2=10P)

a) Bestimmen Sie jeweils das Bild der folgenden reellen Funktionen. Welche der angegebenen Funktionen ist *injektiv*, welche *surjektiv* und welche *bijektiv*? Begründen Sie!

   i) $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $f(x) := \sin^2(x)$,

   ii) $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $g(x) = \frac{1}{x}$,

   iii) $h : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}$, $h(x) = x^2 - 3\lfloor \frac{x^2}{3} \rfloor$. Hierbei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$für eine reelle Zahl x die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

b) Es seien A und B endliche Mengen *mit gleich vielen Elementen*. Beweisen Sie: Eine Abbildung $f : A \to B$ ist genau dann injektiv, wenn sie bijektiv ist.

c) Es seien K, L und M Mengen und $f : K \to L$, $g : L \to M$ Abbildungen. Beweisen Sie jeweils durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die folgenden Aussagen *falsch* sind:

   i) Ist g surjektiv, so ist auch die Verkettung $g \circ f : K \to M$ surjektiv.

   ii) Ist f injektiv, so ist auch die Verkettung $g \circ f : K \to M$ injektiv.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (10P) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_{n+1} \in \mathbb{R}$ gegeben. Weiter sei

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \quad (1 \leq k \leq n).$$

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie vollständige Induktion nach n)

Aufgabe 4 (3+3+4=10P) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

a) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $\sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$,

b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$ gilt: $2^n > n^2$,

c) Für alle *geraden* natürlichen Zahlen n gilt: $5^n - 3^n$ ist durch 8 teilbar.

Abgabe: Bis **Mittwoch, den 09. November** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.