Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 1 (WiSe 2016/17)
4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (1+5+5+2+7=20P) Ein sog. *Dedekindscher Schnitt* (nach Richard Dedekind, 1831-1916, deutscher Mathematiker) ist eine Menge X von rationalen Zahlen mit den Eigenschaften

i) $X \neq \emptyset$ und $\mathbb{Q} - X \neq \emptyset$,

ii) $x \in X$ und $r \in \mathbb{Q}$ mit $r < x \implies r \in X$,

iii) X hat kein größtes Element.

Die Menge aller Dedekindschen Schnitte bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}$.

a) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine Menge $X \subset \mathbb{Q}$ mit obigen Eigenschaften an.

b) Für zwei Dedekindsche Schnitte X,Y definiert man die Summe '$X \oplus Y$' vermöge

$$X \oplus Y := \{x + y \,:\, x \in X,\, y \in Y\}.$$

Zeigen Sie: $X \oplus Y$ erfüllt i) - iii). Gibt es $0^* \in \mathfrak{R}$ mit $0^* \oplus X = X$ für alle $X \in \mathfrak{R}$?

c) Sei $X \in \mathfrak{R}$. Wir schreiben '$X \succ 0$', wenn $0 \in X$ bzw. '$X \preceq 0$', wenn $0 \notin X$. Für zwei Dedekindsche Schnitte X, Y mit $X, Y \succ 0$ definiert man das Produkt '$X \odot Y$' vermöge

$$X \odot Y := \{z \in \mathbb{Q} \,:\, \exists\, x \in X, y \in Y, x, y > 0 \text{ sodass } z \leq x \cdot y\}$$

Zeigen Sie: $X \odot Y$ erfüllt i) - iii). Gibt es $1^* \in \mathfrak{R}$ mit $1^* \odot X = X$ für alle $X \in \mathfrak{R}$ mit $X \succ 0$?

d) Es sei $X_{\sqrt{2}} := \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x < 0 \text{ oder } x^2 < 2\}$. Bestätigen Sie die Gleichung

$$X_{\sqrt{2}} \odot X_{\sqrt{2}} = \{y \in \mathbb{Q} \,:\, y < 2\}.$$

e) Zeigen Sie, dass durch

$$\phi : \mathfrak{R} \to \mathbb{R},\ X \mapsto \sup X$$

eine strukturverträgliche Abbildung gegeben ist; d.h. $\phi(X \oplus Y) = \phi(X) + \phi(Y)$ $\forall X, Y \in \mathfrak{R}$, $\phi(X \odot Y) = \phi(X) \cdot \phi(Y)$ $\forall X, Y \in \mathfrak{R}$ mit $X, Y \succ 0$, $\phi(X) \leq 0$ wenn $X \preceq 0$ und $\phi(X) > 0$ wenn $X \succ 0$. Bestimmen Sie ferner $\phi^{-1}(0)$ und $\phi^{-1}(1)$.

Bitte wenden!

Bemerkung: Man kann die Multiplikation aus c) auf beliebige $X, Y \in \mathfrak{R}$ ausweiten und zeigen, dass $(\mathfrak{R}, \oplus, \odot, \succ)$ ein vollständig geordneter Körper ist. Dies stellt eine Möglichkeit dar, den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen aus $\mathbb{Q}$ zu konstruieren.

Aufgabe 2 (8P) Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
Ist $A \subset \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, so ist A genau dann nach oben beschränkt, wenn gilt:

$$\inf \{a^{-1} : a \in A\} > 0.$$

Es ist dann $\sup A = \big(\inf \{a^{-1} : a \in A\}\big)^{-1}$.

Aufgabe 3 (1+3+3+3+2=12P) Welche der folgenden Mengen reeller Zahlen sind nach oben oder nach unten beschränkt? Bestimmen Sie gegebenenfalls Supremum und Infimum und überprüfen Sie, ob diese Maxima bzw. Minima sind:

a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 4 < 0\}$,

b) $\left\{\frac{x-y}{x+y} \in \mathbb{R} : x, y > 0\right\}$,

c) $\{n\big((-1)^n - 1\big) - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

d) $\{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{N}\}$,

e) $\{\frac{m}{n} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{N},\ m < n\}$.

Abgabe: **Bis Mittwoch, den 23. November** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.