Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 1 (WiSe 2016/17)
7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (10P)

Betrachten Sie die durch die Vorschrift

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1}^2 = a_n + 1, \quad a_n > 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 \leq a_n \leq \frac{1}{2}\big(1+\sqrt{5}\big)$$

und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst monoton. Folgern Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. Was hat dieser Grenzwert mit dem Ausdruck

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\dots}}}}$$

zu tun?

Aufgabe 2 (5+5=10P)

a) Es sei $\xi \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die durch $b_n := \xi^n$, $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge. Zeigen Sie: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn $|\xi| < 1$ oder $\xi = 1$ gilt.

b) Beweisen Sie: Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn die Folgen $\big(\mathrm{Re}(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(\mathrm{Im}(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ der Real- und Imaginärteile von z_n konvergieren. Es gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

Aufgabe 3 (10P)

Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *monoton fallende Nullfolge* positiver reeller Zahlen. Betrachten Sie die durch die Vorschrift

$$d_1 = c_1, \quad d_{n+1} = d_n + (-1)^n c_{n+1} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
(*Hinweis:* Verwenden Sie das Konvergenzkriterium von Cauchy)

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (6+4=10P)

a) Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine *überabzählbar-unendliche* Teilmenge der reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass es dann eine *injektive* Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ gibt, sodass die durch

$$a_n := f(n),\ n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge *konvergiert*. Ist die Bedingung "A ist überabzählbar-unendlich" notwendig für die Gültigkeit der obigen Aussage?

b) Bekanntermaßen ist die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen abzählbar, d.h. es gibt eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Wir definieren die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vermöge

$$q_n := \varphi(n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine *Teilfolge* $(q_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $\lim_{k\to\infty} q_{n_k} = x$.

Abgabe: **Bis Mittwoch, den 14. Dezember** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.