Universität des Saarlandes
Fachrichtung – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 2 (SoSe 2017)
11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (1+9=10P)

a) Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalle und $G : J \to \mathbb{R}$, $y : I \to J$ differenzierbare Funktionen. Für $t \in I$ setzen wir
$$F(t) := G\big(y(t)\big).$$
Zeigen Sie, dass y dann auf I die Differentialgleichung
$$y'(t) \cdot G'\big(y(t)\big) = F'(t)$$
löst.

b) Finden Sie mit Hilfe von Teil a) eine Lösung des Anfangswertproblems
$$y'(t) \cdot y(t) = \frac{y(t)^2 + 1}{2t}, \quad t \in [1, \infty), \quad y(1) = 1.$$

Aufgabe 2 (3+7=10P)

a) Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$ und $t_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Funktion $y(t) = e^{(t-t_0)A}(\eta_0)$ ist auf $\mathbb{R}$ die eindeutige Lösung des linearen Systems
$$\begin{cases} y(t_0) = \eta_0, \\ y'(t) = A\big(y(t)\big). \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil a) die Lösung von
$$y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (10P)

Berechnen Sie alle Richtungsableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$ im Punkt $(1, 2)$. Bestimmen Sie $v \in S^1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\big\}$ so, dass $\partial_v f(1, 2)$ *minimal* ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (10P) Zeigen Sie, dass für die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} |y/x^2| \cdot e^{-|y/x^2|}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

die Richtungsableitung $\partial_v f(0,0)$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ existiert, obwohl die Funktion im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist.

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 06. Juli** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.