Universität des Saarlandes
Fachrichtung – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 2 (SoSe 2017)
Blatt zur Klausurvorbereitung

Versuchen Sie die folgenden Fragen zu beantworten, ohne im Skript nachzuschauen:

1. Was ist der Unterschied zwischen gleichmäßiger und punktweiser Konvergenz einer Folge von Funktionen? Welche Implikation besteht zwischen beiden Konvergenzarten?

2. Wie prüft man die gleichmäßige Konvergenz einer Folge von Funktionen?

3. Welche Vertauschungsregeln gelten zwischen den Grenzwerten von Summen, Integralen und Ableitungen von Funktionenfolgen?

4. Parametrisieren Sie die reguläre Kurve
$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \big(t, 1, \cosh(t)\big)$$
nach der Bogenlänge.

5. Wie ist das Frenetsche Dreibein einer regulären Raumkurve definiert? Wie die Begriffe Krümmung und Torsion?

6. In einem metrischen Raum (X, d) gibt es zwei äquivalente Charakterisierungen von abgeschlossenen Mengen. Wie lauten diese?

7. Wie prüft man, ob eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) offen ist?

8. Ist jede beschränkte und abgeschlossene Menge in einem metrischen Raum kompakt?

9. Wie ist der Begriff "Cauchy-Folge" in einem metrischen Raum (X, d) definiert?

10. Es sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum X. Zeigen Sie, dass dann durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf X definiert wird.

11. Zeigen Sie, dass der Raum $C^1\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ zusammen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ kein Banachraum ist.

12. Wann heißt eine Teilmenge eines Vektorraumes "konvex"?

13. Geben Sie zwei äquivalente Definitionen dafür an, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_x) und (Y, d_y) stetig ist.

14. Für welche $s \in \mathbb{R} - \{0\}$ konvergiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^s + x^{\frac{1}{s}}}\,\mathrm{d}x$?

15. Es sei $f : [1/2, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Für $y \geq 0$ setzen wir $F(y) := \displaystyle\int_{1/2}^{1} f(x^y)\,\mathrm{d}x$. Ist die Funktion $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar?

16. Berechnen Sie e^A für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

17. Zeigen Sie, dass $y(t) = \frac{t^3}{3\sqrt{3}}$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = t \cdot \sqrt[3]{y(t)}$, $y(0) = 0$ auf $[0, \infty)$ ist, und bestimmen Sie mindestens eine weitere Lösung. Wieso hat das AWP keine eindeutige Lösung?

18. Was versteht man unter der "maximalen Lösung" eines AWPs?

19. Wie lauten die Definitionen der Begriffe "partiell differenzierbar", "richtungsdifferenzierbar" und "total differenzierbar"?

20. Zeigen Sie: Ist eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in einem Punkt x total differenzierbar, so existieren in diesem Punkt alle Richtungsableitungen. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

21. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = ye^{\sqrt{|x|}}$. Prüfen Sie f im Punkt $(0, 0)$ auf Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit. Ist f im Nullpunkt total differenzierbar?

22. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der totalen Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in einem Punkt x, und der Stetigkeit der partiellen Ableitungen in x?

23. Gegeben seien die drei Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x) := \begin{pmatrix} x \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}, \quad g(x, y, z) := \begin{pmatrix} xy^2 \\ -xz^2 \end{pmatrix}, \quad h(x, y) := (x - y)^2.$$
Verwenden Sie die Kettenregel, um die Ableitung von $h \circ g \circ f$ zu bestimmen.

24. Wie sind für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ∇f und Δf definiert? Wie ist für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\operatorname{div} g$ definiert? Wie ist für $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\operatorname{rot} F$ definiert?

25. Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F, G : U \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Zeigen Sie die Identität
$$\operatorname{div}(F \times G) = \big\langle G, \operatorname{rot} F \big\rangle - \big\langle F, \operatorname{rot} G \big\rangle.$$

26. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:
$$\nabla f(x) \equiv \text{const.} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists a_0, ..., a_n \in \mathbb{R} : \; f(x) = a_0 + a_1 x_1 + ... + a_n x_n.$$

Abgabe: Keine!