Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 2 (SoSe 2017)
5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (3+7=10P) *Exkurs zu Fourierreihen*

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|<\infty$.

Zeigen Sie, dass dann die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big)$$

gleichmäßig gegen eine stetige, 2π-periodische Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)$ konvergiert.

b) Zeigen Sie die Formeln

$$\int_0^{2\pi}\cos(ix)\cdot\cos(jx)\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin(ix)\cdot\sin(jx)\,\mathrm{d}x=\pi\cdot\delta_{ij}$$

$$\text{und}\qquad\int_0^{2\pi}\sin(ix)\cdot\cos(jx)\,\mathrm{d}x=0\qquad\text{für alle } i,j\in\mathbb{N}.$$

Hierbei ist δ_{ij} das sog. Kronecker delta ($\delta_{ij}:=1$, wenn $i=j$, $\delta_{ij}:=0$, wenn $i\neq j$). Folgern Sie daraus (für f, a_n, b_n wie in a)):

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}x\qquad\text{und}\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Eine Reihendarstellung wie in a) einer 2π-periodischen Funktion in Termen von $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ bezeichnet man als *Fourierreihendarstellung* (nach *Joseph Fourier*, frz. Mathematiker u. Naturwissenschaftler, 1768-1830).

Aufgabe 2 (11P)

Wir betrachten den Vektorraum $X=C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ der auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ stetigen, reellwertigen Funktionen zusammen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty:=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$A:=\big\{f\in X\ :\ f(x)\geq 0\text{ für alle }x\in[0,1]\big\}\subset X$$

in der von $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Topologie abgeschlossen ist und bestimmen Sie den Rand ∂A von A.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (4×2=8P) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subset X$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) A offen $\iff A \cap \partial A = \emptyset$.

b) A abgeschlossen $\iff \partial A \subset A$.

c) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

d) A° ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von A.

Aufgabe 4 (4+7=11P)

Es seien $\mathbb{R}[x]$, $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ wie in Aufgabe 4 von Blatt 4.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[x]$ zusammen mit der Norm $\|\cdot\|_2$ kein Banachraum ist.

(*Hinweis:* Betrachten Sie die Folge aus b) von Aufgabe 4 auf Blatt 4.)

b) Zeigen Sie, dass durch

$$d\big(p(x), q(x)\big) := \big|\deg p(x) - \deg q(x)\big| + \|p(x) - q(x)\|_1$$

eine Metrik auf dem Raum $\mathbb{R}[x]$ gegben ist, die diesen zu einem vollständigen metrischen Raum macht.

Abgabe: Bis **Freitag, den 26. Mai** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.