Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 3 (WS 2017/18)
10. Übungsblatt

Aufgabe 1 (2+2+3=7P) Es seien X, Y, Z topologische Räume und λ ein Maß auf X. Zeigen Sie:

a) Ist $f : X \to \mathbb{R} - \{0\}$ λ-messbar, so ist auch $\frac{1}{f}$ λ-messbar;

b) $f : X \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann λ-messbar, wenn jede Komponentenfunktion von f λ-messbar ist;

c) Für $A \subset X$ ist $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ genau dann λ-messbar, wenn A λ-messbar ist.

Aufgabe 2 (2+5+6+7=20P) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\mathcal{L}(\Omega)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller $\mathcal{L}^1$-messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass durch $f \sim g \;:\Leftrightarrow\; \mathcal{L}^1\big(\{x \in \Omega \,:\, f(x) \neq g(x)\}\big) = 0$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{L}(\Omega)$ definiert wird.

b) Das sog. *essentielle Supremum* einer messbaren Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} f(x) := \inf\left\{ \sup_{x\in\Omega-N} f(x) \,:\, \mathcal{L}^1(N) = 0 \right\}.$$

Zeigen Sie: $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} f(x) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} g(x)$ wenn $f \sim g$ und $f(x) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

c) Betrachten Sie den Quotientenraum

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega) \,:\, \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty \right\} \Big/ \sim.$$

Es bezeichne $[f] \in L^\infty(\Omega)$ die Äquivalenzklasse von $f \in \mathcal{L}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass durch $\big\|[f]\big\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$ eine Norm auf $L^\infty(\Omega)$ gegeben ist.

d) Zeigen Sie, dass $\big(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}\big)$ ein Banach-Raum ist.

(*Hinweis:* Betrachten Sie für eine Cauchy-Folge $\big([f_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^\infty(\Omega)$ die Menge $M := \left\{ x \in \Omega \,:\, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \big\|[f_n] - [f_m]\big\|_{L^\infty} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \right\}$ und verwenden Sie Teil b) um zu zeigen, dass $X - M$ eine $\mathcal{L}^1$-Nullmenge ist.)

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (4+4=8P) Es seien X, Y topologische Räume und λ ein Maß auf X . Zeigen Sie:

a) Ist $f : X \to Y$ eine λ-messbare Funktion, so ist jede Funktion $g : X \to Y$ mit

$$\lambda\Big(\{x \in X \ : \ f(x) \neq g(x)\}\Big) = 0,$$

ebenfalls λ-messbar.

b) Ist $f_n : X \to Y$ eine Folge λ-messbarer Funktionen mit

$$\lambda\Big(\{x \in X \ : \ f_n(x) \text{ konvergiert nicht}\}\Big) = 0,$$

so ist die Funktion $f(x) := \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \ \text{falls dieser Grenzwert existiert,} \\ 0, \ \text{sonst} \end{array} \right\}$, ebenfalls λ-messbar.

Aufgabe 4 (5P) Zeigen Sie jeweils durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass sowohl der Satz von Lusin als auch der Satz von Egoroff (Satz 24.3 und Satz 24.4 aus der Vorlesung) ohne die Voraussetzung "$\lambda(A) < \infty$" im Allgemeinen falsch ist.

Abgabe: Bis **Mittwoch, den 10. Januar** 12:00 Uhr in den Briefkästen in Geb. E 2.5.