Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 3 (WS 2017/18)
11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (10P)

Sei $Q = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie nur anhand der Definition, dass dann $\chi_Q \cdot f$ $\mathcal{L}^n$-integrierbar ist.

Aufgabe 2 (5+5=10P)

Es sei X eine Menge, λ ein Maß auf X und $f : X \to \mathbb{R}$ eine λ-messbare Funktion. Zeigen Sie:

a) Für jede λ-Nullmenge A ist $\chi_A \cdot f$ λ-integrierbar mit $\int \chi_A \cdot f \mathrm{d}\lambda = 0$.

b) Für jedes $c \in (0, \infty)$ gilt die Ungleichung

$$\lambda\big(\{|f| \geq c\}\big) \leq \frac{1}{c} \int |f| \, \mathrm{d}\lambda.$$

Aufgabe 3 (10P)

Es sei X eine Menge und $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt. Mit δ_{x_0} bezeichnen wir das in x_0 konzentrierte Dirac-Maß, d.h. $\delta(A) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x_0 \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ Zeigen Sie, dass jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ δ_{x_0}-integrierbar ist mit

$$\int f \, \mathrm{d}\delta_{x_0} = f(x_0).$$

Aufgabe 4 (10P)

Sei X eine Menge und λ ein Maß auf X. Für eine Folge $f_n : X \to \mathbb{R}$ λ-summierbarer Funktionen gelte

i) f_n konvergiert punktweise λ-f.ü. gegen eine Grenzfunktion $f : X \to \mathbb{R}$,

ii) f ist λ-summierbar und $\int |f_n| \, \mathrm{d}\lambda \xrightarrow{n\to\infty} \int |f| \, \mathrm{d}\lambda$.

Zeigen Sie, dass dann bereits

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, \mathrm{d}\lambda = 0$$

gilt, indem Sie das *Lemma von Fatou* auf die Funktion $g_n := |f_n| + |f| - |f_n - f|$ anwenden.

Abgabe: Bis **Mittwoch, den 17. Januar** 12:00 Uhr in den Briefkästen in Geb. E 2.5.