Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 3 (WS 2017/18)
12. Übungsblatt

Aufgabe 1 (14P) Die auf dem halboffenen Intervall $I = [a, b)$ ($b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) definierte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig. Zeigen Sie: f ist genau dann $\mathcal{L}^1$-summierbar auf I, wenn das uneigentliche Riemann-Integral

$$\lim_{t \uparrow b} \int_a^t |f(x)| \,\mathrm{d}x \quad \text{konvergiert.}$$

In diesem Fall gilt

$$\int_I f \,\mathrm{d}\mathcal{L}^1 = \lim_{t \uparrow b} \int_a^t f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2 (8P) Sei X eine Menge, λ ein Maß auf X und $f : X \to \mathbb{R}$ eine λ-summierbare Funktion. Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine *beschränkte*, λ-summierbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\int |f - g| \,\mathrm{d}\lambda < \varepsilon.$$

Aufgabe 3 (6P) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 3]$ sei $f_n(x) := \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{wenn } x \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{wenn } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$

Zeigen Sie, dass die Folge f_n punktweise $\mathcal{L}^1$-f.ü. gegen eine $\mathcal{L}^1$-summierbare Funktion $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ konvergiert und bestimmen Sie

$$\int_{[0,3]} f \,\mathrm{d}\mathcal{L}^1.$$

Aufgabe 4 (6+6=12P)

a) Wir betrachten $Q = [1, 2] \times [2, 3] \times [0, 2]$ und $f : Q \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \dfrac{2z}{(x + y)^2}$. Zeigen Sie, dass die Funktion f auf Q $\mathcal{L}^3$-summierbar ist und berechnen Sie

$$\int_Q f \,\mathrm{d}\mathcal{L}^3.$$

b) Bestimmen Sie das Lebesgue-Maß der Menge

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Fertigen Sie zunächst eine Skizze an!

Abgabe: Bis **Mittwoch, den 24. Januar** 12:00 Uhr in den Briefkästen in Geb. E 2.5.