Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 3 (WS 2017/18)
2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (5+5=10P) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{k+1}(U)$ und $a \in U$. Es bezeichne $T_{a,k}(v)$ das k-te Taylorpolynom von f im Entwicklungspunkt a.

a) Zeigen Sie, dass für das Restglied $R_{a,k}(v) = f(a+v) - T_{a,k}$ gilt:

$$\lim_{|v|\to 0} \frac{1}{|v|^k}\big|R_{a,k}(v)\big| = 0.$$

b) Es sei nun $p(x_1, ..., x_n)$ irgendein Polynom vom Grad $\leq k$, sodass

$$\lim_{|v|\to 0} \frac{1}{|v|^k}\big|f(a+v) - p(v)\big| = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann p mit $T_{a,k}$ übereinstimmt.

Aufgabe 2 (6+4=10P) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Man sagt, M habe einen C^k-glatten Rand ($k \in \mathbb{N}$), wenn es zu jedem Punkt $x \in \partial M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x zusammen mit einer Funktion $b \in C^k(U)$ gibt, sodass

(i) $\nabla b(x) \neq (0, ..., 0)$ für alle $x \in U$ und

(ii) $U \cap M = \{x \in U \, : \, b(x) < 0\}$.

a) Es seien M, U und b wie oben. Zeigen Sie:

$$U \cap \partial M = \big\{x \in U \, : \, b(x) = 0\big\}.$$

b) Beweisen Sie, dass die offene Einheitskugel $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ einen C^∞-glatten Rand hat.

Aufgabe 3 (10P) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei konvex, differenzierbar und genüge der Wachstumsbedingung

$$|f(x)| \leq c|x|^p \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

mit einer Konstante $c > 0$ und $p \in (1, \infty)$. Zeigen Sie, dass es dann eine Konstante $c' > 0$ gibt, sodass

$$|f'(x)| \leq c'|x|^{p-1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.)

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (5+5=10P) Eine differenzierbare Abbildung $f : U \to V$ zwischen zwei offenen Mengen U und V heißt *Diffeomorphismus*, wenn sie eine differenzierbare Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ besitzt.

a) Zeigen Sie, dass durch $f(x, y) := \big(x(1-y), xy\big)$ ein Diffeomorphismus gegeben ist, der den Streifen $(0, \infty) \times (0, 1)$ auf $(0, \infty) \times (0, \infty)$ abbildet.

b) Beweisen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein Diffeomorphismus, so muss $m = n$ gelten (*"Diffeomorphismen erhalten die Dimension"*).

Abgabe: Bis **Mittwoch, den 8. November** 12:00 Uhr in den Briefkästen in Geb. E 2.5.