Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 3 (WS 2017/18)
3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (8P)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (x^3+xy+1, x+y+y^3+1)$. Zeigen Sie, dass eine Umgebung U von $(-1, 2)$ und eine Umgebung V von $(-2, 10)$ existieren, sodass $g := f|_U$ eine C^∞-Bijektion von U auf V ist. Berechnen Sie $(g^{-1})'(-2, 10)$.

Aufgabe 2 (8P)

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von f. Zeigen Sie: Ist die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ invertierbar, so gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ von x_0, innerhalb welcher x_0 der einzige kritische Punkt von f ist.

Aufgabe 3 (4+8=12P)

Für eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei $|A| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$ und I bezeichne die $n \times n$-Einheitsmatrix.

a) Berechnen Sie die totale Ableitung der Funktion $f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \mapsto B^2$.

   (*Hinweis: Betrachten Sie* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(B + tA)$ *für* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *an der Stelle* $t = 0$.)

b) Zeigen Sie: Ist $|A - I| < \varepsilon$ klein genug, so gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A = B^2$.

Aufgabe 4 (12P)

Es sei $p(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ ein Polynom in zwei Variablen mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ und $x_0 \in \mathbb{C}$ so, dass das Polynom $p(x_0, y) \in \mathbb{C}[y]$ *paarweise verschiedene* Nullstellen $y_1, ..., y_k \in \mathbb{C}$ hat. Zeigen Sie: Dann gibt es eine offene Umgebung $D \subset \mathbb{C}$ von x_0, sowie offene Umgebungen $V_i \subset \mathbb{C}^2$ von (x_0, y_i) zusammen mit C^∞-Funktionen $\varphi_i : D \to \mathbb{C}$, sodass

$$\big\{(x, y) \in V_i \,:\, p(x, y) = 0\big\} = \big\{\big(x, \varphi_i(x)\big) \,:\, x \in D\big\},\ i \in \{1, ..., k\}.$$

(Funktionen $\varphi : \mathbb{C} \supset U \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[x, y]$ gibt, sodass $p\big(x, \varphi(x)\big) = 0\ \forall x \in U$, heißen *algebraische Funktionen*.)

Abgabe: Bis **Mittwoch, den 15. November** 12:00 Uhr in den Briefkästen in Geb. E 2.5.