Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 3 (WS 2017/18)
4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (8P) Durch die Gleichung $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$ wird implizit eine ebene Kurve

$$\mathcal{L} := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; f(x,y) = 0\big\}$$

definiert. Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathcal{L}$, an denen man den Satz über implizite Funktionen *nicht* anwenden kann.

Aufgabe 2 (3+4+5+8*=20P) Es seien $R > r > 0$ reelle Zahlen. Als *Torus* bezeichnet man die Bildmenge $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ der Abbildung

$$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (\phi,\theta) \mapsto \Big(\big(R + r\cos\theta\big)\cos\phi, \big(R + r\cos\theta\big)\sin\phi, r\sin\theta\Big).$$

a) Skizzieren Sie die Teilmengen $\tau\big(\{0\}\times\mathbb{R}\big)$, $\tau\big(\mathbb{R}\times\{0\}\big)$ und $\tau\big(\mathbb{R}\times\{\pi\}\big)$ von $\mathcal{T} = \tau(\mathbb{R}^2)$.

b) Zeigen Sie, dass das Differential von τ an allen Punkten von $\mathbb{R}^2$ vollen Rang hat.

c) Durch die Gleichung $f(x,y,z) = \big(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2\big)^2 - 4R^2(x^2+y^2) = 0$ wird implizit eine Fläche $\mathcal{S} := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; f(x,y,z) = 0\big\} \subset \mathbb{R}^3$ definiert. Zeigen Sie, dass man in jedem Punkt $(x,y,z) \in \mathcal{S}$ den Satz über implizite Funktionen anwenden kann.

d)* (*Zusatzaufgabe*) Beweisen Sie: $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

Aufgabe 3 (10P) Es sei $U \subset \mathbb{R}^{n+m} = \big\{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \;:\; x_i, y_j \in \mathbb{R}\big\}$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-funktion. Für einen Punkt $(x_0,y_0) \in U$ sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

der partiellen Ableitungen nach den ersten n Variablen invertierbar. Zeigen Sie, dass dann das Bild $f(U)$ eine offene Umgebung von $f(x_0,y_0)$ enthält.

(*Hinweis: Betrachten Sie die Funktion* $g : U \to \mathbb{R}^{n+m}$, $g(x,y) := \big(f(x,y), y\big)$.)

Aufgabe 4 (10P) Es sei $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 = 1\}$ die Einheitskreislinie. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞ von $\mathbb{R}^4$ ist.

Abgabe: Bis **Mittwoch, den 22. November** 12:00 Uhr in den Briefkästen in Geb. E 2.5.