Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 3 (WS 2017/18)
5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4+4+3=11P)

a) Beweisen Sie, dass die n-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ genau die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind.

b) Es sei $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$ mit $\operatorname{rang} D\Phi(x) = n - k$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M := \big\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \Phi(x) = 0\big\}$. Zeigen Sie: Für den Tangentialraum $T_{x_0}M$ in einem Punkt $x_0 \in M$ gilt $T_{x_0}M = \ker D\Phi(x_0)$, und für den Normalenraum gilt $N_{x_0}M = \operatorname{Bild} D\Phi(x_0)^T$.

c) Zeigen Sie, dass $M := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 6,\, 2y^2 + z^2 = 3\big\}$ eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie den Tangentialraum T_pM und den Normalraum N_pM an M im Punkt $p = (2, -1, 1)$.

Aufgabe 2 (12P)

Es sei N eine k-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und M eine l-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass dann $N \times M$ eine $(k+l)$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+m}$ ist, und dass für den Tangentialraum in einem Punkt $(p, q) \in N \times M$ gilt:

$$T_{(p,q)}(N \times M) = T_pN \times T_qM.$$

Aufgabe 3 (8P) Es sei $E \subset \mathbb{R}^3$ das Ellipsoid

$$E := \big\{(x, y, z) \,:\, x^2 + 2y^2 + 2z^2 \leq 1\big\}.$$

Bestimmen Sie Minimum und Maximum der Funktion $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := x - y + z$ auf E.

Aufgabe 4 (9P)

Es sei $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die quadratische Form $b(x) := x^T Ax$ mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| = 1\}$ die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre. Zeigen Sie, dass $\max\big\{f(x) \,:\, x \in S^{n-1}\big\}$ und $\min\big\{f(x) \,:\, x \in S^{n-1}\big\}$ Eigenwerte von A sind.

Abgabe: Bis **Mittwoch, den 29. November** 12:00 Uhr in den Briefkästen in Geb. E 2.5.