Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 3 (WS 2017/18)
6. Übungsblatt

Aufgabe 1 (3+4+3=10P) Es sei X eine Menge und $\mathfrak{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt *Algebra*, wenn gilt:

(i) $X \in \mathcal{A}$; (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X - A \in \mathcal{A}$; (iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie: $\mathcal{A} := \big\{A \subset \mathbb{N} \,:\, A \text{ oder } \mathbb{N} - A \text{ ist endlich}\big\} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist eine Algebra.

b) Beweisen Sie: Ist $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ ein beliebiges Mengensystem, so ist

$$\mathfrak{A}(\mathcal{B}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \supset \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X) \text{ Algebra}}} \mathcal{A}$$

die kleinste Algebra, die alle Mengen aus $\mathcal{B}$ enthält. (Man sagt, $\mathfrak{A}(\mathcal{B})$ ist die von $\mathcal{B}$ *erzeugte* Algebra.)

c) Bestimmen Sie $\mathfrak{A}(\mathcal{C})$ für $\mathcal{C} := \big\{\{n\} \,:\, n \in \mathbb{N}\big\} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

Aufgabe 2 (7P) Es sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ eine Algebra (vgl. Aufgabe 1). Zeigen Sie: Zu jeder Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ von Mengen aus $\mathcal{A}$ gibt es eine Folge $(B_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ mit

(i) $B_n \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, (ii) $B_n \cap B_m = \emptyset$ wenn $n \neq m$ und

(iii) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

Aufgabe 3 (4+8=12P) Für kompakte Quader $Q = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, $b_i > a_i$, definieren wir

$$\operatorname{vol}(Q) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine Folge von Quadern $(Q_i)_{i=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}^n$, mit $\mathbb{Q}^n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ und $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_i) \leq \varepsilon$.

b) Ist $C \subset \mathbb{R}^3$ das Bild einer stetig-differenzierbaren Abbildung $f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, so gibt es endlich viele Quader $Q_1, ..., Q_N$ in $\mathbb{R}^3$ mit $C \subset Q_1 \cup ... \cup Q_N$ und

$$\operatorname{vol}(Q_1) + ... + \operatorname{vol}(Q_N) \leq \varepsilon.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (11P) Es sei X eine Menge und $\emptyset \in \mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X. Ferner Sei $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ eine Abbildung mit $\nu(\emptyset) = 0$. Für beliebiges $A \in \mathfrak{P}(X)$ definieren wir

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) \,:\, (B_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \text{ und } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\}.$$

Zeigen Sie, dass dann μ ein (äußeres) Maß auf $\mathfrak{P}(X)$ ist.

Abgabe: Bis **Mittwoch, den 6. Dezember** 12:00 Uhr in den Briefkästen in Geb. E 2.5.