Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 3 (WS 2017/18)
7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (9+3=12P)

a) Es sei $\mu : \mathfrak{P}\big([0,1]\big) \to [0,\infty]$ ein (äußeres) Maß mit den Eigenschaften

i) μ nimmt nur die Werte 0 und 1 an,

ii) alle Intervalle in $\mathfrak{P}\big([0,1]\big)$ sind μ-messbar,

iii) $\mu\big([0,1]\big) = 1$.

Zeigen Sie, dass es dann einen Punkt $x_0 \in [0,1]$ gibt, sodass $\mu \equiv \delta_{x_0}$ das in x_0 konzentrierte Dirac-Maß ist.

b) Gilt die Aussage in a) auch, wenn man $[0,1]$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt? Begründen Sie!

Aufgabe 2 (5+3=8P)

Es sei $\mathcal{L}^1$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Ist $A \subset \mathbb{R}$ eine Menge mit $\mathcal{L}^1(A) < \infty$, und setzen wir für $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha A + \beta := \Big\{\alpha x + \beta \,:\, x \in A\Big\},$$

so gilt $\mathcal{L}^1(\alpha A + \beta) = \alpha \mathcal{L}^1(A)$.

b) Ist $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar, so gilt $\mathcal{L}^1(A) = 0$.

Aufgabe 3 (3+5+2=10P)

Wir betrachten die Menge $\mathcal{M} := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \,:\, a_k \in \{0,1\} \right\} \subset \big[0, 1/9\big]$.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{M}$ *überabzählbar* unendlich ist.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n := \bigcup_{a_1,\dots,a_n \in \{0,1\}} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n} \right]$. Zeigen Sie: $\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$.

c) Folgern Sie aus Teil b): $\mathcal{L}^1(\mathcal{M}) = 0$.

Aufgabe 4 (10P)

Es sei $N \subset \mathbb{R}$ eine Menge mit $\mathcal{L}^1(N) = 0$. Beweisen Sie, dass es dann eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\Big\{s + q \,:\, q \in \mathbb{Q}\Big\} \cap N = \emptyset.$$

(*Hinweis:* Argumentieren Sie indirekt und verwenden Sie Aufgabe 2.)

Abgabe: Bis **Mittwoch, den 13. Dezember** 12:00 Uhr in den Briefkästen in Geb. E 2.5.