Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 3 (WS 2017/18)
8. Übungsblatt

Aufgabe 1 (1+1+5+2+3=12P) Im Folgenden soll eine Menge $V \subset \mathbb{R}$ konstruiert werden, die *nicht* $\mathcal{L}^1$-messbar ist. Man beachte, dass dazu das sog. *Auswahlaxiom*[1] der Mengenlehre benötigt wird.

a) Zeigen Sie, dass durch $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Q}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

b) Begründen Sie, dass jede Äquivalenzklasse in $\mathbb{R}/\sim$ einen Repräsentanten im Intervall $[0,1)$ besitzt. Nach dem *Auswahlaxiom* existiert daher eine Menge $V \subset [0,1)$, die genau einen Repräsentanten jeder Äquivalenzklasse enthält.

c) Folgern Sie:

$$\text{Ist } V\ \mathcal{L}^1\text{-messbar, so muss } \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mathcal{L}^1(V+q) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \infty \text{ gelten.} \tag{1}$$

d) Wir betrachten nun die Menge $M := \bigcup_{q\in[0,1)\cap\mathbb{Q}} \big(V+q\big) \subset [0,2]$. Folgern Sie:

$$\text{Ist } V\ \mathcal{L}^1\text{-messbar, so muss } \sum_{q\in[0,1)\cap\mathbb{Q}} \mathcal{L}^1(V+q) \le 2 \text{ gelten.} \tag{2}$$

e) Erläutern Sie, weshalb (2) im Widerspruch zu (1) steht. Die Menge V kann daher nicht $\mathcal{L}^1$-messbar, und somit insbesondere nicht in der Borelschen σ-Algebra von $\mathbb{R}$ enthalten sein.

Aufgabe 2 (12P) Es sei $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass durch

$$\mu_f(A) := \inf\left\{ \sum_{j\in I} \int_{a_j}^{b_j} f(x)\,\mathrm{d}x \;:\; \Big([a_j,b_j]\Big)_{j\in I} \text{ ist eine abzählbare Überdeckung von } A \right\}$$

ein σ-endliches Radon-Maß auf $\mathbb{R}$ gegeben ist.

Bitte wenden!

[1] "Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen (mit nichtleerer Indexmenge I). Dann gibt es eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in X_i$ für alle $i \in I$." Die Notwendigkeit des Auswahlaxioms für die Existenz nicht messbarer Mengen wurde in den 1960er Jahren vom amerikanischen Mathematiker *Robert M. Solovay* (*1938) gezeigt.

Aufgabe 3 (5+6=11P) Für $A \subset \mathbb{R}$ definieren wir

$$\zeta(A) := \begin{cases} \#A, & \text{wenn } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass durch ζ ein reguläres Borel-Maß auf $\mathbb{R}$ gegeben ist.

b) Bestimmen Sie alle Mengen $B \subset \mathbb{R}$, für die $\zeta \lfloor B$ ein Radon-Maß ist.

Aufgabe 4 (5P) Es seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit

$$\mathcal{L}^n\big\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, f(x) \neq g(x)\big\} = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann bereits $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Abgabe: Bis **Mittwoch, den 20. Dezember** 12:00 Uhr in den Briefkästen in Geb. E 2.5.