21

Umkehrsatz, Implizite Funktionen

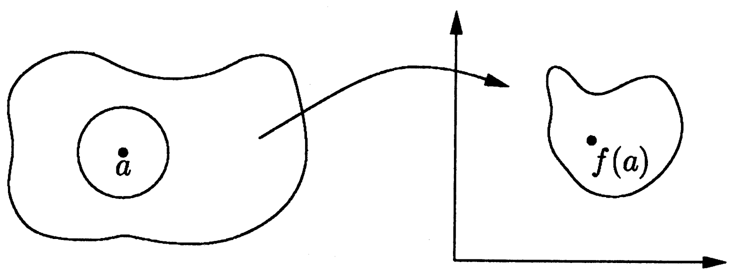
Problem :

Sei $f : X \supset U \to X$ gegeben, $a \in U$.

Wie entscheidet man, ob f lokal bei a invertierbar ist?

Damit ist gemeint:

Wann existiert $B_\delta(a) \subset U$ mit der Eigenschaft, dass f diese Kugel bijektiv auf eine offene Umgebung V von $f(a)$ in X abbildet?



Im Falle einer positiven Antwort ist $\left(f|_{B_\delta(a)}\right)^{-1} : V \to B_\delta(a)$ definiert, und man kann weiter fragen:

Ist $\left(f|_{B_\delta(a)}\right)^{-1}$ auf V diff'bar ? $\Big($ z.B. für $f \in C^1(U,X)\Big)$?

Wir wissen dann $\left(\left(f|_{B_\delta(a)}\right)^{-1}\right)'\left(f(a)\right) = f'(a)^{-1}$.

Erinnerung : "reeller Fall"

$(*)$ $\quad I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $a \in I$, $f \in C^1(I,\mathbb{R})$ mit $f'(a) \neq 0$ $\quad$ (O.E. $f'(a) > 0$)

$\Longrightarrow \quad \exists\, \delta > 0 :\ f' > 0$ auf $(a-\delta,\ a+\delta)$, also f streng wachsend auf $(a-\delta,\ a+\delta)$.

nach Satz 9.4 ist die Umkehrfunktion von $f|_{(a-\delta,\ a+\delta)}$ dann stetig, und Satz 11.6 ergibt die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion.

Im reellen Fall haben wir also eine vollständige Antwort auf unser Problem, und der nächste Satz zeigt, dass man im Allgemeinen die selben Resultate erzielen kann, wenn man die Voraussetzungen $(*)$ sinngemäß interpretiert, statt $f'(a) \neq 0$ wird man verlangen

$$\det f'(a) \neq 0,$$

denn es lassen sich ja bekanntlich nur reguläre lineare Abb. invertieren.

Satz 21.1 : Umkehrsatz

Seien X, Y $\mathbb{R}$-Vektorräume mit dim $< \infty$, *U sei offen in X und $f \in C^\ell(U, Y)$ für ein $\ell \geq 1$. Sei $a \in U$ und die lineare Abbildung $f'(a) : X \to Y$ sei* **bijektiv**. *Dann bildet f eine offene Umgebung Ω von a in U* **homeomorph** *auf eine offene Umgebung V von $f(a)$ in Y ab, und die Umkehrbildung $g : V \to \Omega$ gehört zur Klasse $C^\ell(V, \Omega)$ mit*

$$\boxed{g'(y) = f'(x)^{-1}, \ f(x) = y, \ x \in \Omega.}$$

Bemerkungen :

1) $f'(a) : X \to Y$ bijektiv heißt: $\dim X = \dim Y$
2) wichtiger Spezialfall: $X = Y = \mathbb{R}^n$
   dann lautet die Voraussetzung an $f'(a)$ folgendermaßen:

$$\boxed{\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a)\right) \neq 0}$$

Der Beweis des Satzes benutzt zwei Hilfssätze, die wir für den Euklidischen Fall formulieren. Die Übertragung auf beliebige V.R. ist trivial.

Lemma 1 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $a \in U$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subset U$ und

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq \left(\|f'(a)\| + \varepsilon\right) |x - y| \quad \leftarrow \text{(lokale Lipschitz Bedingung bei } a)$$

für alle $x, \ y \in B_\delta(a)$. ($|\cdot|$ = Eukl. Norm, $\|\cdot\|$ = Operatornorm)

Beweis :

f' ist stetig $\Longrightarrow$ zu $\varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ mit $\left\|f'(x) - f'(a)\right\| < \varepsilon$ für $x \in B_\delta(a) \subset U$.
Seien $x,\ y \in B_\delta(a) \quad \Longrightarrow \quad$ ("Hauptsatztrick")

$$\begin{aligned}
\left|f(y) - f(x)\right| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt} f\Big(x + t(y-x)\Big)\, dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 f'\Big(x + t(y-x)\Big)(y-x)\, dt\right| \\
&\leq \int_0^1 \left\|f'(x + t(y-x))\right\| dt \cdot |y-x| \\
&\leq \left\|f'(a)\right\| \cdot |y-x| + \int_0^1 \underbrace{\left\|f'(x + t(y-x)) - f'(a)\right\|}_{\leq\, \varepsilon,\ \text{da}\ x+t(y-x)\in B_\delta(a)} dt \cdot |y-x|
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 2 :

Die Voraussetzungen von Lemma 1 seien erfüllt mit $\boxed{m = n}$, es gelte noch $\det f'(a) \neq 0$. Dann folgt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\left|f(x) - f(y)\right| \geq (\alpha - \varepsilon)|x-y| \quad \forall\ x, y \in B_\delta(a) \text{ mit } \alpha := \frac{1}{\|f'(a)^{-1}\|}.$$

Bemerkung :

$f'(a)$ ist invertierbar, also $1 \big/ \|f'(a)^{-1}\|$ definiert.

Beweis :

Sei $g(x) = f(x) - f'(a)(x) \implies g'(a) = 0$;
benutze Lemma 1 für g:

$$\left|g(x) - g(y)\right| \leq \varepsilon\ |x-y|,\ x,\ y \in B_\delta(y)$$

also :

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= f'(a)(x-y) + \Big(g(x) - g(y)\Big) \\
\Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| &\geq \left|f'(a)(x-y)\right| - \varepsilon|x-y| \quad (+)
\end{aligned}$$

nun beachte :

$$\begin{aligned} |x-y| &= \left|f'(a)^{-1}\Big(f'(a)(x-y)\Big)\right| \\ &\le \left\|f'(a)^{-1}\right\| \cdot \left|f'(a)(x-y)\right| \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \left|f'(a)(x-a)\right| \ge \alpha \cdot |x-y|$$

$\Longrightarrow$ Beh. mit (+)

□

Beweis von Satz 21.1 :

O.E. $X = Y = \mathbb{R}^n$, $a \in U$ mit $\det f'(a) \neq 0$

1. Schritt : Injektivität von f auf Umgebung von a"

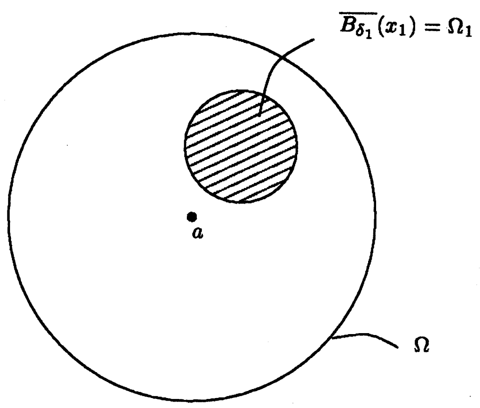
definiere wie in Lemma 2: $\alpha := \frac{1}{\|f'(a)^{-1}\|}$ und wähle $\boxed{\varepsilon := \alpha/2}$

$$\text{setze } \Omega := B_\delta(a) \Longrightarrow \left|f(x_1) - f(x_2)\right| \ge \frac{\alpha}{2}\,|x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in \Omega,$$

d.h. $f|_\Omega$ ist injektiv.

2. Schritt : zeige $V := f(\Omega)$ ist offen

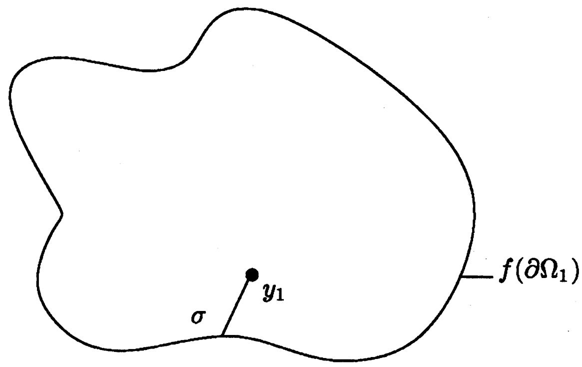
wähle dazu $y_1 := f(x_1) \in V$, $x_1 \in \Omega$, und betrachte eine Kugel $B_\delta(x_1)$ um x_1 mit $\overline{B_{\delta_1}}(x_1) \subset \Omega$



setze $\Omega_1 := B_{\delta_1}(x_1)$

$\Longrightarrow$ $f(\partial\Omega_1)$ kompakt und $y_1 \notin f(\partial\Omega_1)$ wegen der Injektivität von f.

$\Longrightarrow$ $\sigma :=$ dist $(y_1, f(\partial\Omega_1)) > 0$



Behauptung : Es existiert eine Kugel um y_1 in V $(*)$

Wir zeigen: $B_{\sigma^*}(y_1) \subset V = f(\Omega)$ mit $\sigma^* := \frac{1}{2}\sigma$ (genauer: $B_{\sigma^*}(y_1) \subset f(\Omega_1)$)

$(*)$ heißt: zu $y \in B_{\sigma^*}(y_1)$ findet man $x_2 \in \Omega$ mit $f(x_2) = y$

Für $y \in B_{\sigma^*}(y_1)$ und $x \in \partial\Omega_i$ ist

$$\Big|y - f(x)\Big| \geq -|y - y_1| + \Big|f(x) - y_1\Big| \geq \operatorname{dist}\Big(f(\partial\Omega_1), y_1\Big) - \sigma^* = \sigma - \sigma^* = \frac{\sigma}{2}\,.$$

Wir definieren die Hilfsfunktion (bei festem $y \in B_{\sigma^*}(y_1)$)

$$\Psi(x) := \Big|f(x) - y\Big|^2, \; x \in \overline{\Omega_1}.$$

Es gilt :

$$\Psi \in C^1(\Omega_1) \cap C^0(\Omega_1), \;\; \Psi \geq \frac{\sigma^2}{4} \text{ auf } \partial\Omega_1, \;\; \Psi \text{ besitzt ein Minimum;}$$

gemäß (beachte die Wahl von y !)

$$\Psi(x_1) = \Big|f(x_1) - y\Big|^2 = \Big|y_1 - y\Big|^2 \overset{y \in B_{\sigma^*}(y_1)}{<} (\sigma^*)^2 = \frac{\sigma^2}{4} \leq \text{ Werte von } \Psi \text{ auf } \partial\Omega_1$$

kann dieses Minimum nicht auf $\partial\Omega_1$ liegen, es gibt einen *inneren* Punkt $x_2 \in \Omega_1$ in dem Ψ minimal wird, d.h.

$$\nabla\Psi(x_2) = 0 \iff f'(x_2)\Big(y - f(x_2)\Big) = 0$$

Laut Vor. ist $\det f'(a) \neq 0$; $f \in C^1$ garantiert $\det f'(x) \neq 0$ **für x nahe bei a**, d.h. wir können O.E. $\det f' \neq 0$ auf Ω annehmen. Speziell ist dann $f'(x_2)$ regulär und aus $f'(x_2)(y - f(x_2)) = 0$ folgt $y = f(x_2)$, womit $(*)$ bewiesen ist.

3. Schritt : $g := \Big(f|_\Omega\Big)^{-1} : V \to \Omega$ ist C^ℓ

Sei $y_\circ = f(x_\circ)$ ein Punkt aus V, $x_\circ \in \Omega$. Da f in $x_\circ$ diff'bar ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $B_r(x_\circ)$ von $x_\circ$ mit

$$\frac{1}{|x - x_\circ|}\,\Big|f(x) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)(x - x_\circ)\Big| \;\leq\; \frac{\varepsilon \cdot \alpha}{2\|f'(x_\circ)^{-1}\|} \quad (1)$$

für $x \in B_r(x_\circ)$, wobei wir $\Omega = B_\delta(a)$ wie schon vorher so klein machen, dass $f'(x_\circ)$ invertierbar ist. Es gilt wie früher:

$$\alpha := \frac{1}{\|f'(a)^{-1}\|} \;.$$

Natürlich ist auch $f\Big(B_r(x_\circ)\Big)$ offen (Begründung wie im 2^{ten} Schritt), also gibt es eine Kugel $B_R(y_\circ) \;\subset\; f\Big(B_r(x_\circ)\Big)$.

Nach Schritt 1 gilt :

$$\Big|f(x) - \underbrace{y_\circ}_{=f(x_\circ)}\Big| \;\geq\; \frac{\alpha}{2}\,|x - x_\circ| \quad \forall\, x \in B_r(x_\circ)\;. \qquad (2)$$

Andererseits ist für $y = f(x) \in B_R(y_\circ)$ $\Big(\Longrightarrow\; x \in B_r(x_\circ)\Big)$

$$\begin{aligned}
& g(y) - g(y_\circ) - f'(x_\circ)^{-1}(y - y_\circ) \\
= \;& x - x_\circ - f'(x_\circ)^{-1}\Big(f(x) - f(x_\circ)\Big) \\
= \;& -f'(x_\circ)^{-1}\Big\{f(x) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)(x - x_\circ)\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & |g(y) - g(y_\circ) - f'(x_\circ)^{-1}(y - y_\circ)| \\
\leq \;& \|f'(x_\circ)^{-1}\| \;\cdot\; |f(x) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)(x - x_\circ)| \\
\overset{(1)}{\leq} \;& \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \cdot \alpha\,|x - x_\circ| \\
\overset{(2)}{\leq} \;& \varepsilon\,|f(x) - y_\circ| \\
= \;& \varepsilon \cdot |y - y_\circ|\;.
\end{aligned}$$

Also ist g diff'bar in $y_\circ$ mit $g'(y_\circ) = f'(x_\circ)^{-1}$.
Alle weiteren Aussagen ergeben sich nun aus der Formel

$$g' = \Big(f' \circ g\Big)^{-1}$$

unter Beachtung der folgenden Tatsachen :

1) f' und g sind stetig $\Longrightarrow$ $f' \circ g$ ist stetig
2) Die Menge $\{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \det A \neq 0\} =: \mathcal{R}$ ist offen in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und die *Inversion*

   $$I(A) := A^{-1}$$

   ist stetige Abbildung $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$.

Wegen $g' = I \circ f' \circ g$ folgt Stetigkeit von g', also $g \in C^1(V, \Omega)$. Ist $f \in C^2$, so ist $f' \circ f \in C^1$; die Abbildung I ist C^∞ (da $I(a) =$ rat. Funktion in den Koeff. von A), also ist $g' \in C^1$ (nach Formel), d.h. $g \in C^2(V, \Omega)$. Weiter schließt man induktiv.

□

Korollar : (Satz von der offenen Abbildung)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1. $f'(x)$ sei für alle Punkte $x \in U$ invertierbar. Dann ist f eine offene Abbildung, d.h. für offene Mengen $A \subset U$ ist $f(A)$ offen. Ist f zudem injektiv, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \to U$ stetig differnzierbar.

Beweis :

Sei $U' \subset U$ offen, $y_\circ \in f(U')$, also $y_\circ = f(x_\circ)$ für ein $x_\circ \in U'$. Man wende den Satz an auf $\tilde{f} : U' \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{f} := f|_{U'}$:
Nach dem 2^{ten} Beweisschritt gibt es eine Kugel $B_r(x_\circ)$ die in U' enthalten ist, so dass $f(B_r(x_\circ))$ eine offene Menge ist.
Also ist $f\Big(B_r(x_\circ)\Big)$ offene Umgebung von $y_\circ$ in $f(U')$, also $f(U')$ offen.
Die 2^{te} Aussage ist klar.

□

Definition 21.1 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

a) $f : U \to \mathbb{R}^n$ *heißt* **regulär**, *wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*
  i) $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$
  ii) f *injektiv*
  iii) $\det f'(x) \neq 0$ *ist für alle* $x \in U$.

b) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ *offen.* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *heißt ein* **Diffeomorphismus von U auf V**, *wenn f regulär ist mit Bild $f = V$.*
(Diffeom. der Klasse $C^k \Longleftrightarrow f$ Diffeom. und $f \in C^k$)

Bemerkungen :

1) f regulär $\overset{\text{KOR}}{\Longrightarrow}$ $f(U)$ offen, also f Diffeomorphismus von U auf $f(U)$.
2) f regulär $\overset{\text{Satz 21.1}}{\Longrightarrow}$ f^{-1} regulär.
3) wir haben gesehen:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in C^1(U, \mathbb{R}^n), \ \det f'(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U \implies \\ \text{jeder Punkt } x \text{ hat eine Umgebung, auf der f injektiv ist ("lokale Injektivität"),} \end{array} \right.$$

Das reicht natürlich nicht, um auf Injektivität zu schließen ! (d.h. f muß nicht regulär sein !

Beispiel :

$$f(x,y) = e^x \, (\cos y, \sin y), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(Bild $f = ?$)

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \implies \det f'(x,y) = e^{2x} > 0 \quad \text{überall}$$

Dagegen ist $f(x, y+2\pi) = f(x,y)$, also f nicht (global) injektiv.

□

$\longrightarrow$ Übungen: weitere Beispiele!

Implizite Funktionen

ist ein Stichwort, das eine Methode zur *Lösung nichtlinearer Gleichungen* beschreibt. (genauer: Methode zur Beschreibung der Lösungsmenge)

Situation :

$U \subset \mathbb{R}^n$ *offen* $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $m < n$; sei $x_\circ \in U$ mit $f(x_\circ) = y_\circ \in \mathbb{R}^m$.
Die Gleichung hat i.a. <u>nicht nur</u> die Lösung $x_\circ$.

Frage :

Wie sieht die Lösungsmenge $\{x \in U : f(x) = y_\circ\}$ aus ?

Beispiele :

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ <u>linear</u>, $f(x,y) := ax + by,\ a, b \in \mathbb{R}$,
$N_f := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\Big\}$? *(Nullstellenmenge von f)*

<u>**Fall 1**</u> : $f \equiv 0 \implies N_f = \mathbb{R}^2$

<u>**Fall 2**</u> : $f \not\equiv 0 \implies N_f = \text{Kern}\, f$ hat $\dim 1$

Sei O.E. $b \neq 0 : (x,y) \in N_f \iff y = -\frac{a}{b}\, x$

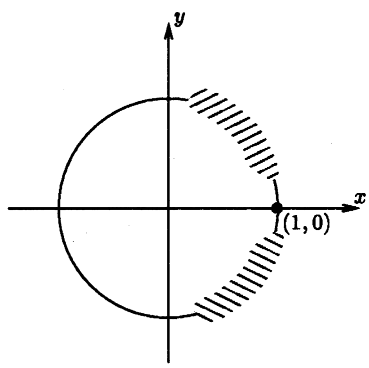
D.h.: *N_f ist Graph von $x \mapsto -\frac{a}{b}\, x$*

<u>M.a.W.</u> :

Wir haben die Gleichung $f(x,y) = 0$ **"nach y aufgelöst"**, d.h. $y = y(x)$ *als Funktion von x geschrieben*, was unter der Voraussetzung $\frac{\partial f}{\partial y} = b \neq 0$ möglich ist.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x^2 + y^2$
Struktur von $\Big\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 1\Big\}$?
Es handelt sich um **1 - Kreislinie** um $(0,0)$. Offenbar:

$$f(x,y) = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \pm\sqrt{1-y^2} \quad \text{bzw.} \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$$



Der Punkt $(1,0)$ gehört zur Menge. In der Nähe von $(1,0)$ kann man **nicht nach** y auflösen,

also die Niveaumenge als Graph von $y = y(x)$ schreiben, da zu $x < 1$ stets zwei y-Werte gehören. Man sieht allerdings unschwer, dass der schraffierte Bereich gegeben ist durch
$\left\{\left(\sqrt{1-y^2},\, y\right) : -1 \le y \le 1\right\}$.

Wir haben hier also noch die Möglichkeit, *lokal bei* $(1,0)$ *x als Funktion von y zu schreiben*, d. h. die Niveaulinie ist bis auf Drehung wieder Graph einer Funktion.

<u>Beobachtung:</u> $\frac{\partial f}{\partial x}\,(1,0) = 2,\ \frac{\partial f}{\partial y}\,(1,0) = 0$
die Ableitung nach x ist bei $(1,0)$ von 0 verschieden, und man hat bei $(1,0)$ die **eindeutige** Darstellung $(x(y), y)$ für Punkte auf der Niveaulinie.
(Vermutung: $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0 \rightsquigarrow x = x(y)$; $\quad \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \rightsquigarrow y = y(x)$)

Satz 21.2 : (Satz über implizite Funktionen)

Seien $\boxed{n > m}$, *U offen im $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ von der Klasse C^1. $x_\circ$ sei aus U mit $f(x_\circ) = 0$, und $f'(x_\circ) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ habe <u>maximalen Rand m</u>.*
O.E. seien die letzten m Spaltenvektoren von

$$f'(x_\circ) = \left.\left(\begin{array}{c|ccc|} \partial_1 f^1 \ldots\ldots & \partial_{n-m+1} f^1 & \ldots\ldots & \partial_n f^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^m \ldots\ldots & \partial_{n-m+1} f^m & \ldots\ldots & \partial_n f^m \end{array}\right)\right\} m$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n-m}\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m} \quad ,$$

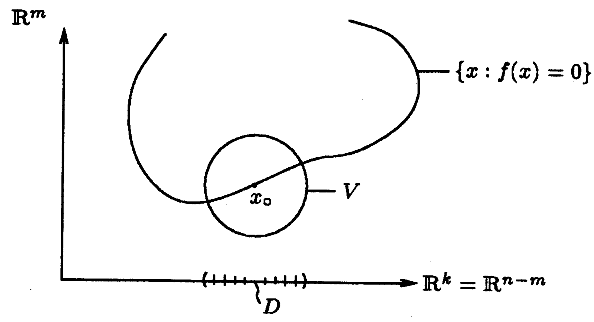
d.h.: die Ableitungen von f nach den letzten m Variablen sind linear unabhängig.
Somit gilt: $\det \Box \neq 0$.
Sei $k := n - m$, und für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\hat{x} := (x_1, \ldots, x_{n-m}) = (x_1, \ldots, x_k)$. Dann gibt es eine offene Umgebung V von $x_\circ$ in U, eine offene Umgebung D von $\hat{x}_\circ$ in $\mathbb{R}^k$, sowie $\varphi \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ mit

(1) $\quad \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ k+1 \le j \le n}} \neq 0$ *auf V*

und

(2) $\quad \left\{x \in V : f(x) = 0\right\} = \textit{graph}(\varphi) = \left\{(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) : \hat{x} \in D\right\}$.

$\Box$



Die Nullstellenmenge von f ist *lokal bei* $x_\circ$ als Graph *über* $D \subset \mathbb{R}^k$ geschrieben: für $x \in$ Nullstellenmenge nahe $x_\circ$ gilt

$$\begin{cases} x_{n-m+1} = x_{n-m+1} \ (x_1, \dots, x_{n-m}) \\ \vdots \\ x_n = x_n \ (x_1, \dots, x_{n-m}) \end{cases}$$

Bemerkung :

ausführliche Diskussion in Spezialfällen nach dem folgenden Beweis

Beweis von Satz 21.2 :

Bedingung (1) gilt für $x_\circ \overset{f \in C^1}{\Longrightarrow} \exists$ Umg. $U' \subset U$ von $x_\circ$ mit (1) auf U' ;
sei für $x \in U'$

$$F^i(x) := \begin{Bmatrix} x^i & , & 1 \le i \le k = n - m \\ f^{i-k}(x) & , & k+1 \le i \le n \end{Bmatrix} \ , \ i = 1, \dots, n,$$

Also: $F : U' \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x) := \Big(x_1, \dots, x_k, f^1(x), \dots, f^m(x)\Big) = \Big(\hat{x}, f(x)\Big)$
$\Longrightarrow F \in C^1(U', \mathbb{R}^n)$ mit

$$F'(x) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \partial_1 f^1 & \dots & \partial_k f^1 & \partial_{k+1} f^1 & \dots & \partial_n f^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^m & \dots & \partial_k f^m & \partial_{k+1} f^m & \dots & \partial_n f^m \end{array} \right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \vdots\\ 0\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \vdots\\ 0\end{array}}\right\} m \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{\partial_1 f^m \dots \partial_k f^m}}_{k} \underbrace{\hphantom{\partial_{k+1} f^m \dots \partial_n f^m}}_{m} \end{array}$$

Lagrange'scher Entwicklungssatz ("Kästchensatz")

$$\Longrightarrow \det F'(x) \;=\; 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \partial_{k+1} f^1 & \dots & \partial_n f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{k+1} f^m & \dots & \partial_n f^m \end{pmatrix} (x) \;\neq\; 0$$

nach Wahl der Umgebung U' von $x_\circ$;

Satz 21.1 $\Longrightarrow \exists$ offene Umg. V von $x_\circ \subset U'$, so dass $F(V) \subset \mathbb{R}^n$ *offen* ist;
$G := (F|_V)^{-1}$ gehört zur Klasse $C^1(F(V), V)$.

Sei $D := \left\{ \hat{x} \in \mathbb{R}^k : \ (\hat{x}, 0) \in F(V) \right\}$

beachte :

a) $f(x_\circ) = 0 \Longrightarrow F(x_\circ) = (\hat{x}_\circ, f(x_\circ)) = (\hat{x}_\circ, 0)$,
d.h. $(\hat{x}_\circ, 0) \in F(V)$, also $\hat{x}_\circ \in D$

b) $F(V)$ offen in $\mathbb{R}^n \Longrightarrow D$ offen in $\mathbb{R}^k$

zusammen: $\underline{D = \text{ offene Umgebung von } \hat{x}_\circ \text{ in } \mathbb{R}^k}$.

Weiter gilt folgende Kette von Äquivalenzen:

$$(x \in V)\ f(x) = 0 \iff F(x) = (\hat{x}, 0) \iff \hat{x} \in D \text{ und } \underbrace{x = G\big(F(x)\big) = G(\hat{x}, 0)}_{(*)}$$

Setze also :

$$\varphi(\hat{x}) := \underbrace{\Big(G^{k+1}(\hat{x}, 0), \dots, G^n(\hat{x}, 0)\Big)}_{\in \mathbb{R}^m}.$$

Dann gilt :

$$(*) \iff x = \big(\hat{x}, \varphi(\hat{x})\big),$$

womit

$$\Big\{x \in V : \ f(x) = 0\Big\} = \Big\{\big(\hat{x}, \varphi(\hat{x})\big) : \ \hat{x} \in D\Big\}$$

bewiesen ist.

$\square$

Bemerkungen zu Satz 21.1 :

1) $f \in C^\ell$ mit $\ell \geq 1 \implies$ Auflösungsfunktion $\varphi \in C^\ell$

2) $f(x_\circ) = \eta$ mit $\eta \in \mathbb{R}^m$ beliebig $\implies$ die Niveaumenge $(x:\ f(x) = \eta)$ kann entsprechend bei

   $x_\circ$ lokal dargestellt werden (klar: betrachte $f - \eta$).

3) Seien irgendwelche m Spalten von $f'(x_\circ)$ linear unabhängig, also z.B.

$$\det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_{\alpha_j}}\right)_{1 \leq i,j \leq m} (x_\circ) \neq 0 \quad \text{fürl} \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_m \leq n.$$

   Dann gilt :

   es gibt eine Umgebung V von $x_\circ$ in U und Fkten λ^j mit

$$\Big\{x \in V:\ f(x) = 0\Big\} = \Big\{x \in V:\ x_{\alpha_j} = \lambda^j(\tilde{x}),\ j = 1, \ldots, m\Big\},$$

   wobei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$ die Variablen mit Index $\neq \alpha_j$ zusammenfaßt.

   Indem man in $\mathbb{R}^n$ eine geeignete Variablentransformation vornimmt, kann man stets die Situation des Satzes herstellen. Die Transformation besteht darin, die Variablen umzunummerieren.

4) Die im Satz vorkommende Funktion heißt "implizit definiert", da sie durch die Eigenschaft

$$(*) \quad f\Big(\hat{x}, \varphi(\hat{x})\Big) \ = \ 0,\ \hat{x} \in D,$$

   festgelegt wird. Auch wenn man sie *nicht* kennt, kann man ihre Ableitung ausrechnen:

   Die Kettenregel ergibt aus $(*)$

$$0 = f'\Big(\hat{x}, \varphi(\hat{x})\Big) \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 \\ \partial_1\varphi^1 & \ldots & \ldots & \partial_k\varphi^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1\varphi^m & \ldots & \ldots & \partial_k\varphi^m \end{pmatrix} (\hat{x}) \quad \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} n - m = k$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 f^1 & \ldots & \partial_n f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^m & \ldots & \partial_n f^m \end{pmatrix} \Big(\hat{x}, \varphi(\hat{x})\Big) \circ (-\ '' -)$$

$$= \Big(\partial_j f^i(\ldots) + \sum_{\ell = n-m+1}^{n} \partial_\ell f^i(\ldots) \cdot \partial_j \varphi^{\ell+m-n}(\hat{x})\Big)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ J=1,\ldots,k}}$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$\sum_{\ell=n-m+1}^{n} \partial_\ell f^i\Big(\hat{x}, \varphi(\hat{x})\Big)\, \partial_j\, \varphi^{\ell+m-n}(\hat{x}) = -\partial_j\, f^i(\hat{x}), \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, k$$

Vermöge der im Satz verlangten "Rangbedingung" kann man dieses System nach den Ableitungen von φ auflösen ($\rightarrow$ vgl. Spezialfall $m = 1$)

5) Spezialfall $m = 1$:

$$f : U \to \mathbb{R},\; U \subset \mathbb{R}^n, \text{ sei } C^1;\; x_\circ \in U \text{ mit } f(x_\circ) = 0$$

$$\text{Randbedingung} \iff \nabla f(x_\circ) \neq 0 \iff \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} : \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_\circ) \neq 0$$

Dann sagt Satz 21.1 :

$\exists$ Umgebung V von $x_\circ$ in $\mathbb{R}^n$,

$\exists$ Umgebung C von $(x_\circ^1, \ldots, x_\circ^{i-1}, x_\circ^{i+1}, \ldots, x_\circ^n)$ in $\mathbb{R}^{n-1}$,

$\exists$ C^1-Abbildung $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Big\{x \in V :\; f(x) = 0\Big\}$$
$$= \Big\{\Big(x_1, \ldots, x_{i-1}, \underbrace{\varphi(x_1, \ldots, \cancel{x_i} \ldots, x_n)}_{i\text{te Stelle}}, x_{i+1}, \ldots, x_n\Big) : \Big(x_1, \ldots, \cancel{x_i}, \ldots, x_n\Big) \text{ in } D\Big\}$$

$\cancel{x_i}$ heißt: die Variable x_i kommt nicht vor.

Im Satz ist $i = n$ angenommen. Dann lautet das Ergebnis:

$$\boxed{N_f \cap V \;=\; \Big\{\Big(x_1, \ldots, x_{n-1},\; \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})\Big) :\; (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D\Big\}}$$

$$\Big(N_f \;=\; \Big\{x \in U :\; f(x) \;=\; 0\Big\} \quad \text{Nullstellenmenge von } f\Big).$$

Für $i = n$ hat man also die Graphensituation $x_n = \varphi\,(x_1, \ldots, x_{n-1})$ für andere i gilt dies erst nach einer orthogonalen Transformation.

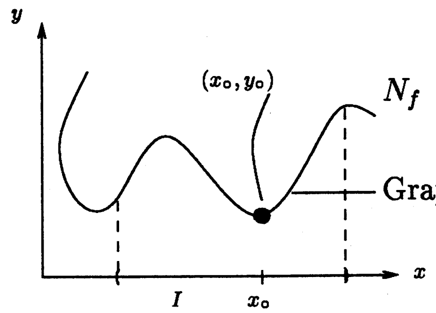
Wir berechnen nochmals die Ableitung der impliziten Funktion φ im Fall $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_\circ) \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
0 &= f\Big(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})\Big) \quad \Longrightarrow \quad (\ell=1,\dots,n)\\
0 &= \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\dots)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})\Big)\\
&\quad \cdot\frac{\partial}{\partial x_\ell}\Big(j^{\text{te}}\text{ Komponente von }\Big(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi\,(x_1,\dots,x_{n-1})\Big)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x_n}(\dots)\cdot\frac{\partial}{\partial x_\ell}\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})+\frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\dots)\\
\Longrightarrow\ & \frac{\partial}{\partial x_\ell}\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}) = -\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})\Big)^{-1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\dots),\\
&\ell=1,\dots,n-1. \qquad \text{„ partiell Dgl. für } \varphi \text{ "}
\end{aligned}
$$

6) noch spezieller : $n=2,\ m=1$

$f:\mathbb{R}^2\supset U\longrightarrow\mathbb{R}$ sei C^1 mit $f(x_\circ,y_\circ)=0$ für ein $(x_\circ,y_\circ)\in U$.

Fall 1 : $\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ,y_\circ)\neq 0$

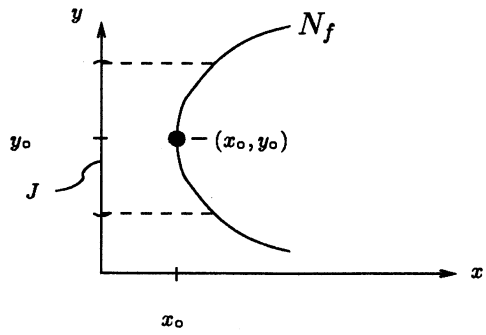


$$
\Longrightarrow \quad \begin{cases} \Big\{(x,y)\in U:\ f(x,y)=0\Big\}\cap \text{Umgebung von }(x_\circ,y_\circ)\\ =\ \text{Graph von }\varphi: I\longrightarrow\mathbb{R},\ I=\text{Intervall um }x_\circ\end{cases}
$$

dann gilt :

$$
\begin{aligned}
& f\Big(t,\varphi(t)\Big)=0 \text{ auf } I\\
\Longrightarrow\ & 0=\tfrac{d}{dt}f\Big(t,\varphi(t)\Big)=\tfrac{\partial f}{\partial x}\Big(t,\varphi(t)\Big)+\varphi'(t)\tfrac{\partial f}{\partial y}\Big(t,\varphi(t)\Big)\\
\Longrightarrow\ & \boxed{\varphi'(t)=-\tfrac{\partial_x f}{\partial_y f}\Big(t,\varphi(t)\Big)}\ ,\ t\in I
\end{aligned}
$$

<u>**Fall 2**</u> **:** $\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) \neq 0$



$\Longrightarrow N_f \cap$ Umgebung von $(x_\circ, y_\circ) = \Big\{(\Psi(t),\, t) :\ t \in J\Big\}$

hier kann man N_f bei $(x_\circ, y_\circ)$ <u>nicht</u> als Graph über der x-Achse schreiben, N_f ist Graph über der y-Achse

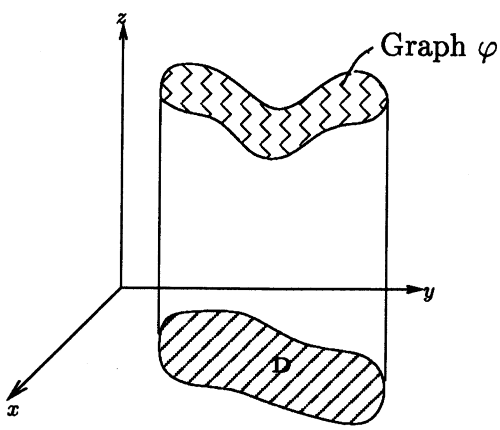
$$\Psi'(t) = -\frac{\partial_y f}{\partial_x f}\Big(\Psi(t), t\Big).$$

Man beachte :

- die Gleichungen $\varphi' = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}(\cdot, \varphi)$ bzw. $\Psi' = -\frac{\partial_y f}{\partial_x f}(\Psi, \cdot)$
  sind $\longrightarrow$ <u>gewöhnliche Differentialgleichungen</u> für φ bzw. Ψ
- gemäß N_f = Graph φ bzw. $N_f = \Big\{\Big(\Psi(t), t\Big) :\ t \in J\Big\}$ lokal bei $(x_\circ, y_\circ)$ ist N_f <u>eine glatte Kurve zumindest in der Nähe von $(x_\circ, y_\circ)$.</u>

7) <u>ebenfalls speziell</u> : <u>$m = 1,\ n = 3$</u> (Flächen in $\mathbb{R}^3$)

jetzt: $f\,(x_\circ, y_\circ, z_\circ) = 0$ für einen Punkt $(x_\circ, y_\circ, z_\circ) \in U$



$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_\circ, y_\circ, z_\circ) \neq 0 \implies \begin{cases} N_f \cap \text{ Umg. von } (x_\circ, y_\circ, z_\circ) = \Big\{\big(x, y, \varphi(x,y)\big) : (x,y) \in D\Big\}, \\ D = \text{ Umg. von } (x_\circ, y_\circ) \subset \mathbb{R}^2, \ \varphi : D \to \mathbb{R} \end{cases}$$

N_f = <u>Flächenstück</u> (Graph φ) lokal bei $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$

8) <u>wichtig für Anwendungen :</u> <u>$n = 3, \ m = 2$</u> (Kurven in $\mathbb{R}^3$)

Sei $F = (f, g) : \mathbb{R}^3 \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ F(x_\circ, y_\circ, z_\circ) = (0,0)$, dann ist

(∗) $F(x,y,z) = (0,0)$ <u>Gleichungssystem</u> in 3 Variablen

Vorstellung :

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,z) = 0 \text{ beschreibt Fläche 1} \\ g(x,y,z) = 0 \text{ beschreibt Fläche 2} \end{array}\right\} \implies (*) \text{ ist Schnitt der Flächen, also eine } \underline{\text{Kurve}}.$$

Genauer :

F' habe in $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ <u>maximalen</u> Rang, etwa

$$\det \begin{pmatrix} \partial_y f & \partial_z f \\ \partial_y g & \partial_z g \end{pmatrix} (x_\circ, y_\circ, z_\circ) \neq 0$$

$\implies$ es gibt eine Funktion $I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ t \longrightarrow \big(\varphi(t), \Phi(t)\big), \ I =$ Intervall um $x_\circ$, mit

$$N_F \cap \text{ Umg. von } (x_\circ, y_\circ, z_\circ) = \Big\{\big(t, \varphi(t), \Phi(t)\big) : \ t \in I\Big\}$$

$\Gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ \Gamma(t) := \big(t, \varphi(t), \Phi(t)\big)$,

ist eine <u>reguläre</u> Raumkurve, denn $\Gamma'(t) = \big(1, \varphi'(t), \Phi'(t)\big) \neq 0$.

In den Fällen $\det \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_z f \\ \partial_x g & \partial_z g \end{pmatrix} (x_\circ, y_\circ, z_\circ) \neq 0, \ldots\ldots$ gelten analoge Ergebnisse.

□

$\longrightarrow$ Übungen : weitere Beispiele !

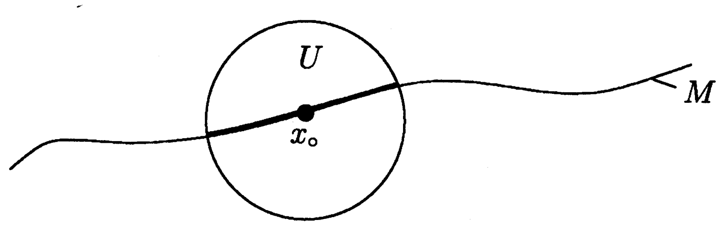
Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

lassen sich gut mit dem impliziten Funktionensatz beschreiben.

Definition 21.2 :

Seien $1 \leq k < n$, $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ *und* $\ell \in \mathbb{N}$.
M heißt **k-dim. Untermannigfaltigkeit der Klasse** $\mathbf{C}^\ell$ *von* $\mathbb{R}^n$*, falls gilt :*
Zu jedem $x_\circ \in M$ *gibt es eine (in* $\mathbb{R}^n$*) offene Umgebung* U *von* $x_\circ$ *und eine Abbildung* $\Phi \in C^\ell(U, \mathbb{R}^{n-k})$*, so dass*

(i) Rang $D\Phi \equiv n - k$ *auf* U
(ii) $M \cap U = \{x \in U : \; \Phi(x) \equiv 0\}$.



Spezialfall :

Sei $\underline{k = n - 1}$, $\Phi \in C^\ell(U, \mathbb{R})$ und die Rangbedingung bedeutet: $\nabla\Phi \neq 0$.
$(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten heißen auch Hyperflächen.

Beispiel :

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \; |x| = 1\right\}, \; n \geq 2$$

$$\underbrace{\Phi(x) := |x|^2 - 1}_{\in C^\infty}; \; \nabla\Phi(x) = 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, \text{ welches nicht zu } M \text{ gehört}$$

also :

$$\text{Rang}\, D\Phi = 1 \text{ auf } M \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \underline{M \text{ ist Hyperfläche}} \text{ in } \mathbb{R}^n, \text{ nämlich die Oberfläche (der Rand)} \\ \text{der Einheitskugel bzgl. der Euklidischen Metrik.} \end{cases}$$

Bemerkung zu Def. 21.2 :

1) es wird *nicht* verlangt, dass man global mit *einer* Abbildung Φ auskommt.

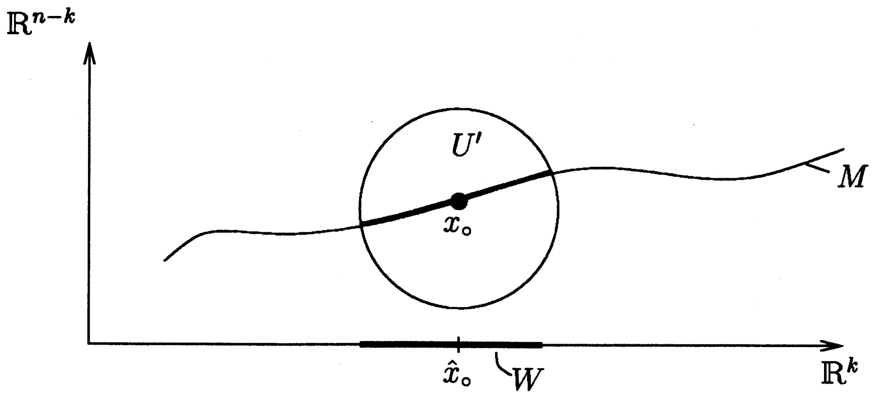
2) man nennt 21.1 die implizite Def. einer Mannigfaltigkeit :

sei $x_\circ \in M$, wähle U, Φ wie in der Def., nach Vertauschung der Variablen in $\mathbb{R}^n$ kann man erreichen:

$$\det \begin{pmatrix} \partial_{k+1}\Phi^1 & \dots & \partial_n\Phi^1 \\ \vdots & & \\ \partial_{k+1}\Phi^{n-k} & \dots & \partial_n\Phi^{n-k} \end{pmatrix} (x_\circ) \neq 0$$

$$\overset{\text{Satz 21.1}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \exists \text{ Umg. } U' \text{ von } x_\circ \text{ in } \mathbb{R}^n \text{ und eine Umg. } W \text{ von } \hat{x}_\circ = (x_0^1, \dots, x_0^k) \text{ in } \mathbb{R}^k, \\ \text{sowie eine Funktion } f: \ W \to \mathbb{R}^{n-k} \end{cases}$$

$$M \cap U' = \Big\{ \big(\hat{x}, f(\hat{x})\big) : \ \hat{x} \in W \Big\} = \text{ Graph } f, \ \text{Projektion}_{\mathbb{R}^k} \ (M \cap U') = W$$



M.a.W. :

M ist k-dimensionale Mannigfaltigkeit $\subset \mathbb{R}^n$

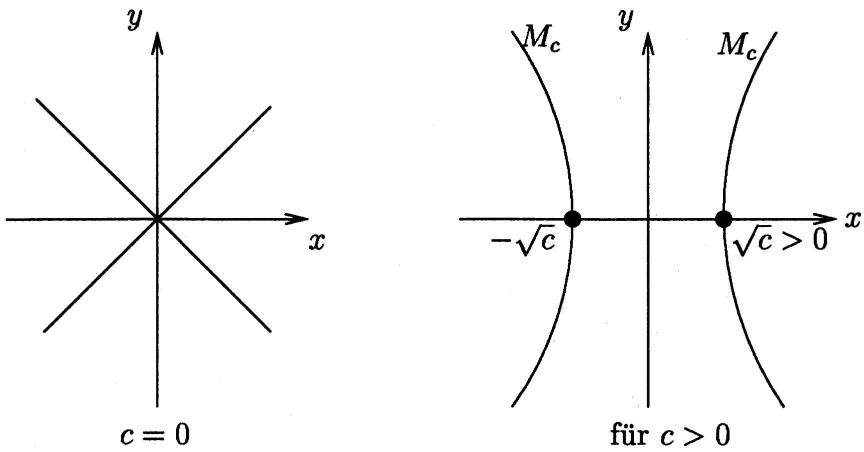
$$\Updownarrow$$

M ist lokal, bis auf Spiegelungen in $\mathbb{R}^n$,
Graph von Funktionen $\mathbb{R}^k \supset D \xrightarrow{c^\ell} \mathbb{R}^{n-k}$, D offen

Beispiel :

$n = 2, \ f(x,y) = x^2 - y^2$

Setze $M_c := \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c \Big\}, \ c \in \mathbb{R}$



$M_\circ$ = Schnitt der beiden Winkelhalbierenden,

bei $(0,0)$ ist die Rangbedingung verletzt $(\nabla f(0,0) = (0,0))$

$\Longrightarrow$ $M_\circ$ <u>keine</u> Mannigfaltigkeit;

Sei $c > 0$, für $(x, y) \in M_c$ ist $\nabla f(x, y) = 2(x, -y) \neq (0,0)$, da $(0,0) \notin M_c$

$\Longrightarrow$ Rang $f' \equiv 1$ auf M_c, M_c ist 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

□

Weitere Beispiele ergeben sich aus der folgenden alternativen Beschreibung für die wir den Begriff der **regulären Abbildung** etwas erweitern müssen.

Definition 21.1* :

Seien $k \leq n$ sowie W offen in $\mathbb{R}^k$. Eine Abbildung $\varphi: W \to \mathbb{R}^n$ der Klasse C^1 heißt **reguläre Abbildung**, falls gilt :

(i) φ ist injektiv

(ii) Rang $D\varphi \equiv k$

(iii) $\varphi^{-1}: \varphi(W) \to W$ ist stetig

Bemerkungen :

1) Für $k = n$ ist iii) automatisch richtig, dann ist $\varphi(W)$ offen und $\varphi^{-1} \in C^1$ (nach Umkehrsatz).

2) Natürlich kann man auch φ der Klasse $C^\ell, \ell > 1$, betrachten.

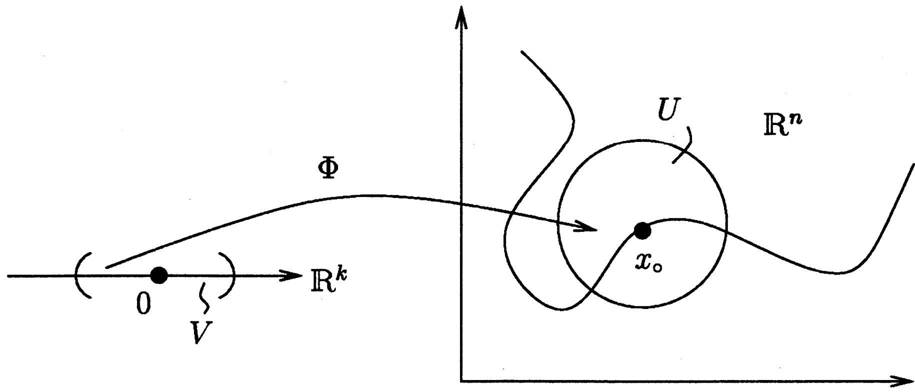
Satz 21.3 : (Beschreibung von Mannigfaltigkeiten)

Seien $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq k < n$ und $\ell \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent :

(i) M ist k-dim. Untermannigfaltigkeit der Klasse C^ℓ

(ii) (Reguläre Parametrisierungen)

Zu jedem $x_\circ \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, eine Umgebung V von 0 in $\mathbb{R}^k$ und eine reguläre Abbildung $\Phi : V \xrightarrow{C^\ell} U$ mit $M \cap U = \Phi(V)$.



Man nennt Φ eine **lokale Parametrisierung** *oder eine* **lokale Karte** *von M bei $x_\circ$. Eine k-dim. Mannigfaltigkeit entsteht also durch Verformen von k-flachen Stücken $V \subset \mathbb{R}^k$ mit regulären Abbildungen in den $\mathbb{R}^n$.*

(iii) (Beschreibung durch Diffeomorphismen)

Zu jedem $x_\circ \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von $x_\circ$ in $\mathbb{R}^n$, eine offene Umgebung W von 0 in $\mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : W \longrightarrow U$ der Klasse C^ℓ mit $\varphi\Big(W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})\Big) = U \cap M$. (Durch φ^{-1} wird M lokal geradegebogen.)

Beweis :

Wir erwähnen nur, dass $(i) \implies (ii)$ direkt aus dem Satz über implizite Funktionen folgt.

$\square$

Standardbeispiel für (ii): reguläre Kurven (mit injektiver Parametrisierung)

$\Phi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei C^ℓ und injektiv mit $\Phi'(t) \neq 0$ für alle t
$\Longrightarrow$ Φ ist reguläre Abbildung im Sinne von Def. 21.1;
früher haben wir von regulären Kurven gesprochen;
durch Umtransformation von (a,b) auf z.B. $(-1,1)$ kann man -wie in (ii) verlangt- erreichen, dass Φ auf einer Nullumgebung $\subset \mathbb{R}$ definiert ist.

Reguläre Kurven $\subset \mathbb{R}^n$ mit injektiver Parametrisierung sind also 1-dim. Untermannigfaltigkeiten.

Bemerkung :

dass $V \subset \mathbb{R}^k$ als Nullumgebung gewählt wird, hat lediglich technische Gründe!

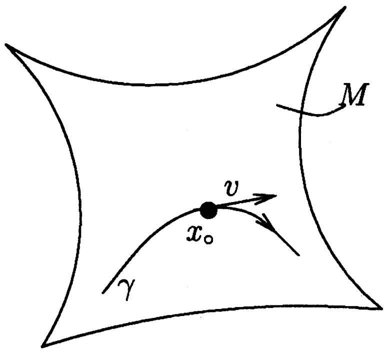
Tangentenvektoren/ Tangentialraum

Definition 21.3 :

Sei M eine k-dim. Mannigfaltigkeit $\subset \mathbb{R}^n$, $x_\circ \in M$.

(i) $v \in \mathbb{R}^n$ *heißt* **Tangentenvektor an M in $\mathbf{x}_\circ$**

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{es gibt eine } C^1\text{-Kurve } \gamma : (-\delta,\delta) \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit} \\ \gamma(0) = x_\circ,\ \gamma'(0) = v \text{ und } \gamma(t) \in M \text{ für alle } t. \end{cases}$$



(Die Kurve γ muss in M verlaufen)

(ii) $T_{x_\circ}M$ = *Menge aller Tangentenvektoren an M in $x_\circ$ heißt* **Tangentialraum an M in $\mathbf{x}_\circ$.**

Bemerkung :

$$\gamma(t) \equiv x_\circ \quad \overset{\gamma \text{ konstante Kurve}}{\Longrightarrow} \quad 0 \in T_{x_\circ}M$$

Satz 21.4 :

Sei M k-dim. Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, $x_\circ \in M$.
Dann ist $T_{x_\circ}M$ ein k-dim. Vektorunterraum von $\mathbb{R}^n$.

Beweis und Darstellung von $T_{x_\circ}M$:

(i) Schreibe M gemäß 21.3(ii), lokal bei $x_\circ$ als

$M \cap U_{x_\circ} = \Phi(V_\circ)$, $\Phi : V_\circ \longrightarrow U(x_\circ)$ regulär,

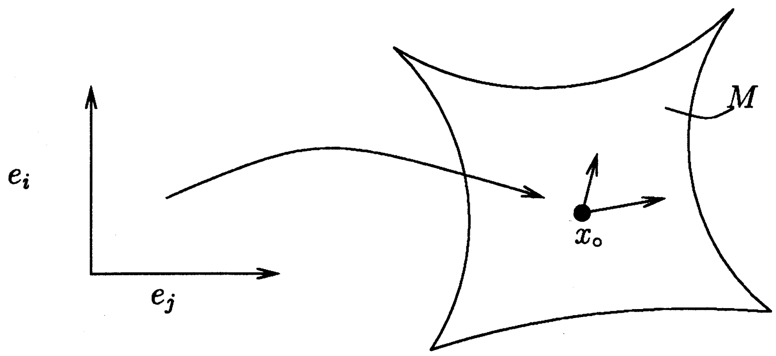
$\Phi(0) = x_\circ$, $V_\circ =$ Nullumg. in $\mathbb{R}^k$, $U_{x_\circ} =$ Umg. von $x_\circ$

Sei $\{e_1, \ldots, e_k\} :=$ Standardbasis in $\mathbb{R}^k$;

setze $\Gamma_i(t) = te_i$, $i = 1, \ldots, k$

$\Longrightarrow \quad \gamma_i(t) := \Phi\big(\Gamma_i(t)\big)$, $t \in (-\delta, \delta)$ (Kurve in M durch $x_\circ$)

$\Longrightarrow \quad \gamma_i'(0) = D\Phi(0)(e_i) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0) \in T_{x_\circ}M.$



Also :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0) \in T_{x_\circ}M, \; i = 1, \ldots, k$$

umgekehrt :

Sei $v \in T_{x_\circ}M \overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} v = \gamma'(0)$, γ Kurve in M durch $x_\circ$ passend gewählt.

Setze $\Gamma(t) := \Phi^{-1}\big(\gamma(t)\big)$ (Kurve in $\mathbb{R}^k$ durch 0)

$\Longrightarrow \Gamma'(0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$ mit gewissen $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (Diff'barkeit folgt aus Konstruktion von Φ !)

Also :

$$v = \gamma'(0) = \frac{d}{dt|_0}(\Phi \circ \Gamma)(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0).$$

<u>Ergebnis</u> :

$$\boxed{\begin{aligned} T_{x_o}M &= \text{Span}\left\{\tfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}(0), \ldots, \tfrac{\partial \Phi}{\partial x_k}(0)\right\} \\ &= \text{Bild } D\Phi(0) \end{aligned}}$$

(ii) Schreibe M gemäß Definition von Mannigfaltigkeit als Nullstellenmenge

$$M \cap U_{x_o} = \left\{x \in U_{x_o} : f(x) = 0\right\} \text{ mit } f : U_{x_o} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}, \text{ Rang } Df = n-k.$$

$$\begin{aligned} & \gamma(t) \text{ ist Kurve in } M \text{ durch } x_o \\ \Longrightarrow \quad & f^i\Big(\gamma(t)\Big) = 0, && i = 1, \ldots, n-k \\ \overset{\text{leite ab}}{\Longrightarrow} \quad & \Big\langle \nabla f^i(x_o), \gamma'(0) \Big\rangle = 0, && \text{-"-} \end{aligned}$$

D.h. :

$$v \in T_{x_o}M \Longleftrightarrow v \perp \nabla f^i(x_o), \; i = 1, \ldots, n-k.$$

Man setzt

$$\Big(T_{x_o}M\Big)^{\perp} = \textbf{Normalraum zu M in } \mathbf{x_o}$$

Dann folgt :

$$\boxed{\Big(T_{x_o}M\Big)^{\perp} = \text{Span}\left\{\nabla f^1(x_o), \ldots, \nabla f^{n-k}(x_o)\right\}}$$

und wir sehen nochmal

$$\dim \Big(T_{x_o}M\Big)^{\perp} = n - k \implies \dim T_{x_o}M = k.$$

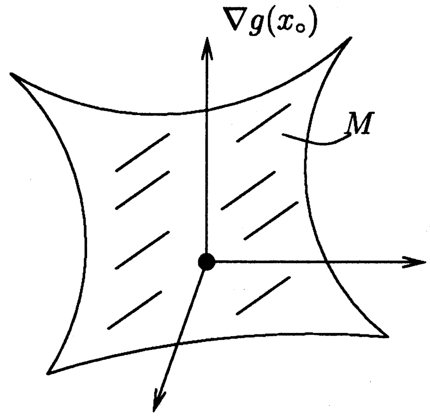
□

Spezialfälle :

1) Sei $M = \Big\{x \in U : g(x) = 0\Big\}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, auf $g : U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, $\nabla g(x) \neq 0$ auf M.

   Dann ist :

$$\mathbf{T_{x_\circ} M} = \Big[\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}_\circ)\Big]^\perp$$



Beispiel :

$S^{n-1} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 = 1\Big\}$

$g(x) := |x|^2 - 1 \implies \nabla g(x) = 2x \neq 0$ auf S^{n-1}

$\implies \Big(T_x S^{n-1}\Big)^\perp = \Big\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\Big\}.$

2) Hyperflächen in Graphenform :

   Sei $M = \Big\{\Big(x, \rho(x)\Big) : x \in \Omega\Big\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $\rho : \Omega \overset{C^l}{\to} \mathbb{R}$

$$\partial_i\big(x, \rho(x)\big) = \Big(e_i, \partial_i \rho(x)\Big) \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{Tangentialraum } T_{(x,\rho(x))}M \text{ wird aufgespannt von} \\ \Big(1, 0 \ldots, 0, \partial_1 \rho(x)\Big), \ldots, \Big(0, \ldots, 1, \partial_{n-1}\rho(x)\Big). \end{array} \right.$$

   bei 2 Variablen x, y :

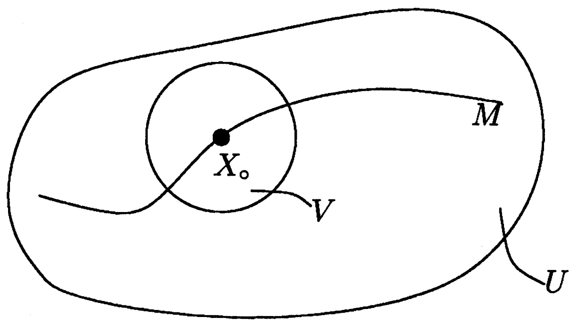
$$T_{(x,y,\rho(x,y))}M = \operatorname{Span}\Big\{\Big(1, 0, \partial_x \rho(x,y)\Big), \Big(0, 1, \partial_y \rho(x,y)\Big)\Big\}.$$

(Noch eine) Anwendung des Begriffes "Mannigfaltigkeit" :

Extrema mit Nebenbedingungen, Lagrange'sche Multiplikatoren

Ausgangspunkte :

(I) *Wie bestimmt man lokale Extrema von $f|_M$?*
hier: $M = k$-dim Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n \subset U$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$



Notation :

$$x_\circ \text{ ist lokales Max. von } f|_M :\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \text{ Umgebung } V \text{ von } x_\circ \subset \mathbb{R}^n \text{ mit} \\ f(x) \leq f(x_\circ) \ \forall\, x \in V \cap M \end{cases}$$

Die für freie lokale Extrema notwendige Bedingung $\nabla f(x_\circ) = 0$ jetzt nicht erfüllt:

Beispiel :

$f(x,y) := x + y,\ M = \Big\{(\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]\Big\} = S^1$
M kompakt, f stetig $\Longrightarrow$ Max. und Min. von $f|_M$ existieren,
aber : $\nabla f(x,y) = (1,1) \neq 0$ auf M

(II) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\overline{\Omega}$ kompakt, $f \in \Big(C^1(\Omega, \mathbb{R}) \ \cap\ C^\circ(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\Big)$,
$M = \partial\Omega$ sei $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit
Wie findet man Max. und Min. von f auf $\overline{\Omega}$?
im Inneren :

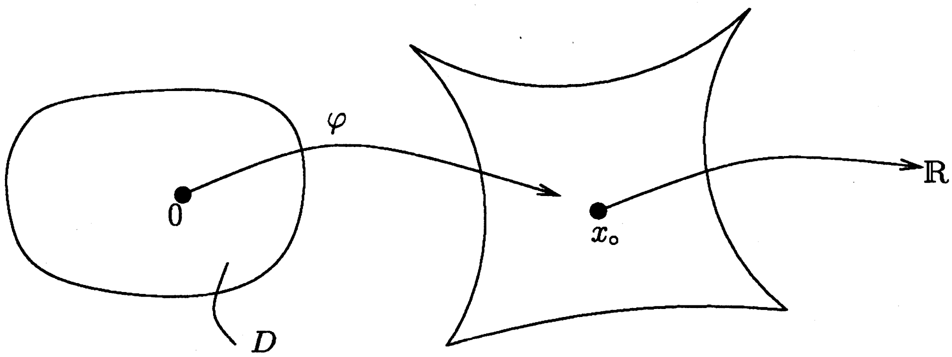
$\nabla f(x) = 0$ ist *notwendige* Bedingung

am Rand :

liegen Max. und/oder Min. auf $M := \partial\Omega$, so bestimmt man zunächst die **lok. Extrema von $\mathbf{f}|_{\mathbf{M}}$** (Tabelle + Vergleich der Werte $f(x)$ liefert die gesuchten Größen).

Lösung des Problems (II)) :

Sei $\dim M = k$, $x_\circ \in M$ sei lokale Extremstelle von $f|_M$, $D \subset \mathbb{R}^k$ offen, wähle *reguläre* Parametrisierung $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von M bei $x_\circ$, 0.E. $\varphi(0) = x_\circ$.



$$\Longrightarrow \quad f \circ \varphi : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ hat eine innere lokale Extremstelle bei } 0 \in D$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla(f \circ \varphi)(0) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \left\langle \nabla f(x_\circ), \tfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi(0) \right\rangle = 0, \ \alpha = 1, \dots, k.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\nabla f(x_\circ) \in \left(T_{x_\circ} M\right)^\perp} \qquad (1)$$

(ersetzt die im Innern vorliegende Bedingung $\nabla f(x_\circ) = 0$)

Umformulierung von (1) :

Schreibe $M \cap V = \left\{ x \in V : g(x) = 0 \right\}$

mit einer Umgebung V von $x_\circ$ in $\mathbb{R}^n$ und $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$,

Rang $Dg = n - k \quad \Longrightarrow \quad \left(T_{x_\circ}\right)^\perp = \operatorname{Span}\left\{ \nabla g_1(x_\circ), \dots, \nabla g_{n-k}(x_\circ) \right\}$,

und nach (1) gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\nabla f(x_\circ) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \nabla g^i(x_\circ)} \qquad (2)$$

(2) besteht aus n Gleichungen mit den Unbekannten $x_\circ^1, \dots, x_\circ^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$.
Ergänzt man (2) noch durch

$$\boxed{g^i(x_\circ) = 0, \ i = 1, \dots, n - k} \qquad (3),$$

so hat man Übereinstimmung in der Zahl der Variablen und Gleichungen.

Satz 21.5 : (Lagrange'sche Multiplikatorenmethode)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-k}), M := \Big\{x \in U : g(x) = 0\Big\}$, Dg habe maximalen Rang auf M. Hat dann $f|_M : M \to \mathbb{R}$ in $a \in M$ ein **lokales Extremum,** *so gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$, so dass für die Funktion $G : U \to \mathbb{R}$, $G(x) := f(x) - \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i g^i(x)$, der Punkt a ein* **kritischer** *Punkt ist, d.h. $\nabla G(a) = 0$.*

$\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$ heißen **Lagrange Multiplikatoren.**

□

Beispiel :

Sei $M = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\Big\}$, $f(x, y) = 2x^3 + y^4, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

gesucht : Max. und Min. von $f|_M$

Sei $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1$.

Notwendige Bedingung:

$\nabla f(x, y)$, $\nabla g(x, y)$ sind linear abhängig $\iff (6x^2, 4y^3) = \lambda \cdot (2x, 2y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

<u>Fall 1</u> : $\lambda = 0$

$\implies (6x^2, 4y^3) = (0, 0) \implies x = 0$ und $y = 0$

<u>unmöglich</u>, da $g(x, y) = 0$ gelten muß

<u>Fall 2</u> : $\lambda \neq 0$

<u>Unterfall a</u> : $x \neq 0$ und $y \neq 0$

$$\begin{aligned} 6x^2 = 2\lambda x &\implies \lambda = 3x \\ 4y^3 = 2\lambda y &\implies \lambda = 2y^2 \\ &\implies 3x = 2y^2 \end{aligned}$$

Nun betrachte $x^2 + y^2 = 1$, d. h. $y^2 = 1 - x^2$

Einsetzen :

$$\begin{aligned} 3x = 2 - 2x^2 &\iff x^2 + \tfrac{3}{2}x - 1 = 0 \\ &\iff x = -\tfrac{3}{4} \pm \sqrt{\tfrac{9}{16} + 1} = -\tfrac{3}{4} \pm \tfrac{5}{4} \end{aligned}$$

$x = -2$ entfällt !

Also :

$$x = \tfrac{1}{2} \quad \overset{x^2+y^2=1}{\Longrightarrow} \quad y = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

<u>Unterfall b</u> : $x = 0$

$\implies \quad y = \pm 1$

<u>Unterfall c</u> : $y = 0$

$$\Longrightarrow \quad x = \pm 1$$

Nun lege man eine Tabelle an :

(x, y)	$(0,1)$	$(0,-1)$	$(1,0)$	$(-1,0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
$f(x, y)$	1	1	2	-2	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$
			$\uparrow$	$\uparrow$		
			max	min		

Bemerkung :

Man kann natürlich jetzt noch untersuchen, ob die anderen Punkte lokale Extrema sind.