23

Maßtheorie

Ziel :

Entwicklung allgemeiner Konzepte, die es gestatten, z.B. Volumina und Oberflächen von Körpern $\subset \mathbb{R}^3$ sinnvoll zu definieren und zu berechnen; "sinnvoll" soll heißen :

für den Einheitswürfel $[0,1]^3$ *erwartet man als Volumen 1* !

Wie interpretiert man Volumenmessung?

Standpunkt :

- **Volumenmessung** ist eine **Abbildung**

  $$\mu : \{\text{Teilmengen des } \mathbb{R}^3\} \longrightarrow [0,\infty]$$

  mit gewissen Eigenschaften, z.B. :

  $$\mu(\emptyset) = 0, \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

  für **disjunkte** Mengen ("**abzählbare Additivität**")

- Flächenmessung ist eine **Abbildung**

  $$\lambda : \{2\,\text{dim Mfkten } \subset \mathbb{R}^3\} \longrightarrow [0,\infty]$$

  mit o.g. Eigenschaften, wobei man μ und λ noch **normiert**, d.h. z.B. $\mu([0,1]^3) = 1$. Wir werden später sehen, dass durch diese Bedingung an μ tatsächlich eine geometrische Volumenmessung in $\mathbb{R}^3$ festgelegt wird.

Zunächst wollen wir den allgemeinen Standpunkt ausbauen, d.h. Maße auf beliebigen Grundmengen X studieren.

Vorbemerkung (technischer Art) : (Reihen mit Gliedern $\in [0,\infty]$)

- Seien $a_k \in [0,\infty]$ für $k \in \mathbb{N}_\circ$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \sup\left\{\sum_{k=0}^{L} a_k : L \in \mathbb{N}_\circ\right\}$$

  wohldefiniert in $[0,\infty]$, und der Wert hängt **nicht** von der Anordnung ab. (Wert ggf. $+\infty$)

- Sei I eine **beliebige abzählbare** Indexmenge und $a_i \in [0,\infty]$ für $i \in I$. Dann setzt man

$$\sum_{i\in I} a_i := \sup\left\{\sum_{j\in J} a_j : J \subset I,\ \# J < \infty\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} \quad \in [0,\infty]$$

  für eine **beliebige** Bijektion $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$.

- Die Summe über die leere (Index-)Menge ist $=: 0$.

Definition 23.1 : *(äußere) Maße*

Sei X eine beliebige Menge.
Eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ heißt **ein Maß auf X**, *falls gilt :*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Für **jede** *Teilmenge A von X und alle* **abzählbaren** *Familien $(B_i)_{i\in I}$ von Mengen $B_i \subset X$ gilt :*

$$\boxed{A \subset \bigcup_{i\in I} B_i \Longrightarrow \mu(A) \le \sum_{i\in I} \mu(B_i)}$$ **(abzählbare Subadditivität)** *"σ- Subadditivität"*

Bemerkungen :

1) $\mu(A) = 0$: A heißt μ-**Nullmenge**
(abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen)

2) Aus (ii) folgt die **Monotonie** :

$$A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \le \mu(B)$$

(benutze (ii) mit $B_1 := B$, $B_k := \emptyset$, $k \ge 2$)

3) In (ii) bedeutet "abzählbar" : $\# I < \infty$ oder $I \cong \mathbb{N}$.

4) In der Literatur nennt man eine **Mengenfunktion** μ mit (i), (ii) ein **äußeres Maß**. Daraus konstruiert man ein Maß durch Einschränkung von μ auf ein gewisses Teilsystem $\mathfrak{M}$ von $\mathcal{P}(X)$. Auf $\mathfrak{M}$ ist μ dann **abzählbar additiv** :

$$B_n \in m \text{ für } n \in \mathbb{N},\, B_n \cap B_m = \emptyset \text{ für } n \neq m \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Dazu später mehr.

Beispiele :

Sei X eine beliebige Menge

i) triviales Maß: $\mu \equiv 0$

ii) **Dirac-Maß** in $a \in X$:

$$\delta_y(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

Dann : $\quad \delta_a(\emptyset) = 0 \quad \surd$

Seien $A,\, B_i \subset X,\, A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$

<u>**Fall 1**</u> : $a \notin A$

$$\delta_a(A) = 0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_a(B_i)$$

<u>**Fall 2**</u> : $a \in A$

$$\Longrightarrow a \in B_{i_\circ} \text{ für ein } i_\circ; \text{ also : } 1 = \delta_a(A) = \delta_a(B_{i_\circ}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_a(B_i)$$

iii) **Zählmaß:** $\quad \delta(A) := \# A$ (**Anzahl der Elemente von** A)
(also $= +\infty$, wenn A keine endliche Teilmenge von X ist). Dass es sich um ein Maß handelt, ergibt sich aus folgender

<u>Übung</u> : Sei $\varphi : X \to [0,\infty]$ beliebig und für $A \subset X$

$$\varphi_\rho(A) := \sup\left\{\sum_{x \in E} \varphi(x) : E \subset A, \# E < \infty\right\}.$$

Für $\rho \equiv 1$ ist φ_ρ das Zählmaß. Man zeige :

Sei $(B_i)_{i\in I}$ eine abzählbare Familie von disjunkten Teilmengen von X. Dann gilt :

$$\varphi_\rho\Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) = \sum_{i \in I} \varphi_\rho(B_i),$$

d.h. φ_ρ ist sogar abzählbar additiv und damit ein Maß(?!).

Als Spezialfall folgt, dass das Zählmaß φ ein Maß ist.

Das nächste Beispiel wird uns etwas länger aufhalten.

Das eindimensionale Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^1$ auf $\mathbb{R}$

Ziel :

definiere ein Maß auf $\mathbb{R}$, so dass Intervalle $[a,b],(a,b),[a,b),(a,b]$ das gleiche "Maß $b-a$" haben

Idee :

überdecke dazu $A \subset \mathbb{R}$ möglichst gut mit Intervallen

Definition 23.2 :

Für $A \subset \mathbb{R}$ ist das Lebesgue - Maß von A die Größe

$$\boxed{\mathcal{L}^1(A) := \inf\Big\{ \sum_{j\in I}\Big(b_j - a_j\Big) \Big| \; \Big([a_j,b_j]\Big)_{j\in I} \text{ ist } \textbf{abzählbare} \text{ Überdeckung von } A\Big\}.}$$

Satz 23.1 :

(i) $\mathcal{L}^1$ *ist ein* **Maß auf** $\mathbb{R}$.

(ii) $\mathcal{L}^1(J) = b-a$ *für* **beliebige** *Intervalle J mit Endpunkten $a \le b$ in $[-\infty,\infty]$.*

(iii) $\mathcal{L}^1(A) > 0$ *für* **offene** *$A \subset \mathbb{R}$,* $\mathbf{A} \neq \emptyset$.

(iv) $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = 0$.

Beweis :

(i) $\emptyset \subset [-\varepsilon,\varepsilon] \overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} \mathcal{L}^1(\emptyset) \le 2\cdot\varepsilon \overset{\varepsilon\searrow 0}{\Longrightarrow} \mathcal{L}^1(\emptyset) = 0.$

Seien $\varepsilon > 0$, $A \subset \mathbb{R}$ gegeben, und es gelte $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ mit Mengen $B_n \subset \mathbb{R}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wählen wir gemäß Definition ($\mathcal{L}^1(B_n) = \inf\ldots$) eine **abzählbare** Überdeckung $\Big(\Big[a_i^n, b_i^n\Big]\Big)_{i\in I_n}$ (I_n = abzählbare Indexmenge) von B_n mit

$$\mathcal{L}^1(B_n) + 2^{-n}\varepsilon \ge \sum_{i\in I_n}\Big(b_i^n - a_i^n\Big).$$

Aus $B_n \subset \bigcup\limits_{i\in I_n}\Big[a_i^n, b_i^n\Big]$ folgt

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{i\in I_n}\Big[a_i^n, b_i^n\Big]\Big),$$

also nach Def. ($\mathcal{L}^1(A) = \inf$ Summe der Intervall-Längen)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(A) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i\in I_n} b_i^n - a_i^n\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{L}^1(B_n) + \left\{\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\right\}\varepsilon \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{L}^1(B_n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt :

$$\mathcal{L}^1(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{L}^1(B_n). \qquad \Longrightarrow \mathcal{L}^1 \text{ ist Maß.}$$

<u>Beachte</u> :

offene Teilmengen $\neq \emptyset$ von $\mathbb{R}$ umfassen ein Intervall positiver Länge,
also folgt (iii) aus

(ii) Sei $J = [a, b]$ mit $a \leq b \in \mathbb{R}$. Aus der Def. folgt :

$$\mathcal{L}^1(J) \leq b - a.$$

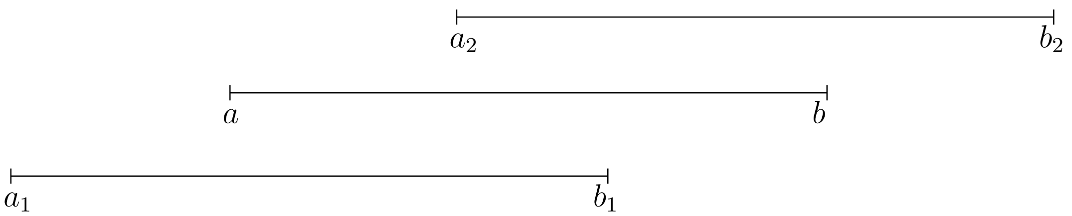
Z.z. ist :

$$(*) \quad b - a \leq \sum_{i\in I}(b_i - a_i) \quad \text{für } \textbf{jede} \text{ höchstens abzählbare Überdeckung } ([a_i, b_i])_{i\in I} \text{ von } J.$$

Dann folgt durch Bildung vom Infimum :

$$b - a \leq \mathcal{L}^1(J).$$

<u>Fall 1</u> : $\#I < \infty \Longrightarrow (*)$ gilt (vgl. Bild!)



<u>Fall 2</u> : $\#I = \infty$, also z.B. : $I = \mathbb{N}$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Vergrößere $[a_i, b_i]$ zu $[a_i - \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i]$ mit $\varepsilon_i := 2^{-i}\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow && J \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i - \varepsilon_i, a_i + \varepsilon_i) \\
&\overset{J \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \quad \exists N : && J \subset \bigcup_{i=1}^{N}(a_i - \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i) \\
&\Longrightarrow && J \subset \bigcup_{i=1}^{N}[a_i - \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i]
\end{aligned}$$

Fall 1 angewendet auf diese letzte Inklusion ergibt gemäß $(*)$ (endl. Indexmenge)

$$b - a \leq \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) + 2 \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \leq \sum_{i \in I} (b_i - a_i) + 2\varepsilon,$$

also gilt $(*)$ auch für die Indexmenge I, da ε beliebig.

Ergebnis :

$$\mathcal{L}^1([a,b]) = b - a \quad \forall\, a \leq b,\ a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Die Monotonie von $\mathcal{L}^1$ ergibt :

$$\mathcal{L}^1([a+\varepsilon, b-\varepsilon]) \leq \mathcal{L}^1((a,b)) \leq \mathcal{L}^1([a-\varepsilon, b+\varepsilon])$$

$$\Longrightarrow \left| \mathcal{L}^1((a,b)) - (b-a) \right| \leq 2\varepsilon,$$

so dass auch

$$\mathcal{L}^1((a,b)) = b - a.$$

Für halboffene Intervalle schließt man analog, für unbeschränkte Intervalle J folgt aus der Definition bzw. Monotonie direkt

$$\mathcal{L}^1(J) = +\infty.$$

$\square$

Später :

entsprechende Konstruktion eines Maßes $\mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ für alle $n \geq 1$
$\rightarrow$ *$\mathcal{L}^3$ ist die richtige Volumenmessung in $\mathbb{R}^3$.*

Definition 23.3 :

X sei beliebiger Grundraum, μ ein Maß auf X.

a) *Für $A \subset X$ definiert man die* **Einschränkung von μ auf A** *durch*

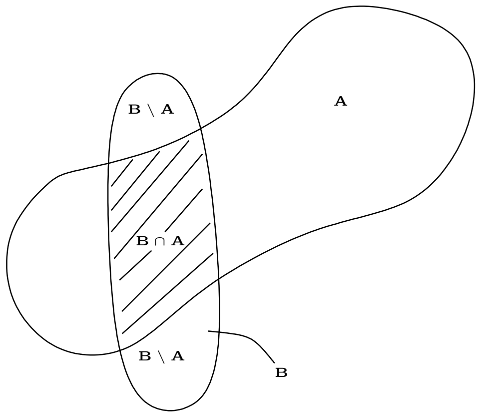
$$(\mu \lfloor A)(B) := \mu(A \cap B),\ B \subset X.$$

Hierbei gilt : $\mu \lfloor A$ ist ein Maß auf X!

b) *$A \subset X$ heißt* **μ-messbar**, *wenn A jede "Testmenge" additiv zerlegt :*

$$\boxed{\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A) \quad \forall\ B \subset X}$$

Dieser Begriff wird eingeführt, um abzählbare Additivität auf disjunkten Mengen zu haben.



Bemerkungen :

1) Subadditivität $\Longrightarrow \quad \mu(B) \overset{B=(B\cap A)\cup(B-A)}{\leq} \mu(B\cap A)+\mu(B-A)$ gilt immer!
   Deshalb muß man nur "$\geq$" prüfen.
2) offenbar : $\emptyset$, X μ-messbar; μ-**Nullmengen sind** μ**-messbar**!
3) $C \subset X$ **beliebig**; A μ-messbar $\Longrightarrow A$ $(\mu \lfloor C)$-messbar
4) A μ-messbar $\overset{\text{"Komplementregel"}}{\Longleftrightarrow}$ $X - A$ μ-messbar.

Satz 23.2 : *(Eigenschaften messbarer Mengen / Operationen mit messbaren Mengen)*

*Sei μ ein Maß auf $X, \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-**messbarer** Mengen. Dann :*

(i) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k, \ \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \quad$ *μ-messbar*

(ii) $A_k \cap A_\ell = \emptyset, \ k \neq \ell \implies \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

"σ-Additivität auf messbaren Mengen"

(iii) Gilt $A_k \subset A_{k+1}$ für alle k, so ist

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \in [0,\infty].$$

(iv) Sei $\mu(A_1) < \infty$ (oder $\mu(A_L) < \infty$ für ein L) und $A_k \supset A_{k+1}$ für alle k (oder für $k \geq L$). Dann folgt

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Beweis : (in 6 Schritten)

1.) Wir erinnern an die Messbarkeitsdefinition für $A \subset X$

$$(*) \quad \mu(B) \geq \mu(A \cap B) + \mu(B - A) \quad \forall\, B \subset X$$

Also gilt für $B \subset X$

$$\mu(B) = \mu(B \cap A_1) + \mu(B - A_1)$$

und (Messbarkeit von A_2, $B - A_1$ als Testmenge in $(*)$)

$$\begin{array}{rcl} \mu(B - A_1) & = & \mu\left((B - A_1) \cap A_2\right) + \mu\left((B - A_1) - A_2\right) \\ \Longrightarrow \qquad \mu(B) & = & \mu(B \cap A_1) + \mu\left((B - A_1) \cap A_2\right) + \mu\left((B - A_1) - A_2\right) \quad (**) \end{array}$$

Es gilt :

$$(B \cap A_1) \cup \Big\{(B - A_1) \cap A_2\Big\} \supset B \cap (A_1 \cup A_2) \text{ und } (B - A_1) - A_2 = B - (A_1 \cup A_2)$$

$$\overset{\text{Monotonie}}{\Longrightarrow} \quad \mu(B \cap A_1) + \mu\left((B - A_1) \cap A_2\right) \geq \mu\left(B \cap (A_a \cup A_2)\right)$$

$$\overset{\text{Einsetzen in } (**)}{\Longrightarrow} \quad \mu(B) \geq \mu\left(B \cap (A_1 \cup A_2)\right) + \mu\left(B - (A_1 \cup A_2)\right),$$

d.h. $\underline{A_1 \cup A_2 \text{ messbar}}$.

Induktion über n liefert :

$$\boxed{\bigcup_{k=1}^{n} A_k \text{ messbar für alle } n}\ ,$$

d.h. endliche Vereinigungen messbarer Mengen sind messbar.

2.) $X - (A_1 \cap A_2) = \underbrace{(X - A_1)}_{\nwarrow \text{ messbar}} \cup \underbrace{(X - A_2)}_{\text{messbar} \nearrow}$ messbar nach 1.)

$\Longrightarrow A_1 \cap A_2$ messbar. ("Komplementregel")

Induktion über n liefert :

$$\boxed{\bigcap_{k=1}^{n} A_k \text{ messbar für alle } n}\ ,$$

d.h. Schnitte von endlich vielen messbaren Mengen ist messbar.

3.) Gelte $A_\ell \cap A_k = \emptyset$ für $k \neq \ell$; setze $B_k := \bigcup\limits_{\ell=1}^{k} A_\ell$ messbar; A_{k+1} messbar

$$\overset{B_{k+1}\,\text{Testmenge}}{\Longrightarrow} \qquad \begin{aligned} \mu(B_{k+1}) &= \mu(B_{k+1} \cap A_{k+1}) + \mu(B_{k+1} - A_{k+1}) \\ &= \mu(A_{k+1}) + \mu(B_k) \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\overset{\text{falls alle Maße} < \infty\,!}{\Longrightarrow} \quad \mu(B_{k+1}) - \mu(B_k) = \mu(A_{k+1})$$

Also :

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mu(B_n) \\ &\overset{\text{Teleskop-Summe}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} (\mu(B_{k+1}) - \mu(B_k)) + \mu(B_1) \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k), \end{aligned}$$

d.h. $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \quad \forall\, n}$.

Also gilt (ii) für endliche Vereinigungen disjunkter Mengen. Es folgt (Monotonie)

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \quad \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

"$\geq$" gilt trivialerweise, also folgt (ii) allgemein.

Rechnung wurde unter der Annahme $\mu(A_k) < +\infty \quad \forall\, k$ gemacht. Andernfalls gilt (ii) direkt!

4) Sei $A_\circ := \emptyset$ und gelte $\forall\, k \in \mathbb{N}_\circ$:

$A_k \subset A_{k+1} \Longrightarrow A_{k+1} - A_k = A_{k+1} \cap (X - A_k)$ messbar, dann folgt nach (ii) :

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k - A_{k-1})\right) \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k - A_{k-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k - A_{k-1}) \overset{\text{(ii)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\overbrace{\bigcup_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1})}^{=A_n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n), \end{aligned}$$

wobei wir (ii) für die disjunkten Mengen $B_k := A_k - A_{k-1}$ benutzt haben.

Damit ist (iii) bewiesen.

5.) Sei nun $A_k \supset A_{k+1}$ und $\mu(A_1) < \infty$.

Screibe

$$A_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \quad \cup \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(A_1 - A_k)}_{\text{aufsteigend messbar}}$$

$$\left.\begin{aligned} \overset{\text{(iii) + Subadd.}}{\Longrightarrow} \quad \mu(A_1) \quad &\leq \quad \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_1 - A_k)\right) \\ &= \quad \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 - A_n). \end{aligned}\right\} (+)$$

A_n messbar $\overset{A_1 \text{Testmenge}}{\Longrightarrow}$ $\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_n) + \mu(A_1 - A_n)$

und wegen $\mu(A_1) < \infty$:

$$\mu(A_1 - A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_1 \cap A_n).$$

Also :

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 - A_n) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu\,\underbrace{(A_a \cap A_n)}_{=A_n}$$

Einsetzen in (+) :

$$\mu(A_1) \leq \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

die umgekehrte Beziehung gilt wegen Monotonie. Es folgt (iv).

6.) Zu beweisen bleibt noch (i), also Messbarkeit von $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

Sei $B \subset X$ beliebig, o.E. $\mu(B) < \infty$, da sonst

$\mu(B) \geq \mu\Big(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)\Big) + \mu\Big(B - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)$ trivial ist.

Definiere $B_j := \bigcup_{k=1}^{j} A_k$.

Beachte : μ-messbare Mengen sind $\mu\lfloor B$-messbar, d.h. (iii), (iv) gelten für $\mu\lfloor B$. D.h. :

$$\begin{aligned} &\mu\Big(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) + \mu\Big(B - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \\ \overset{B_j \text{ messbar nach 1.)}}{=} \quad &\Big(\mu\lfloor B\Big)\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) + (\mu \lfloor B)\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\Big(X - B_k\Big)}_{\text{absteigend}}\Big) \\ \overset{\text{(iii), (iv) } B_j \text{ aufsteigend !}}{=} \quad &\lim_{k\to\infty} \Big(\mu\lfloor B\Big)(B_k) + \lim_{k\to\infty} \Big(\mu\lfloor B\Big)(X - B_k) \\ \overset{B_k \text{messbar bzgl. } \mu\lfloor B}{=} \quad &\Big(\mu\lfloor B\Big)(X) = \mu(B) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ ist } \mu \text{ - messbar.}$$

Gemäß $\quad X - \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X - A_k)$ folgt die 2^{te} Behauptung aus (i).

□

Bemerkungen :

1) Für konkrete Maße auf dem $\mathbb{R}^n$ werden wir später ein sehr handliches Kriterium formulieren, mit dessen Hilfe sich "**Messbarkeit einer Menge bzgl. diser Maße**" schnell entscheiden läßt.

   Merke :

   Für vernünftige Maße (Volumenmessung in $\mathbb{R}^n$) sind fast alle Mengen messbar, nicht-messbare Mengen lassen sich dort nur mit dem Auswahlaxiom konstruieren.

2) Sei X eine Menge, $\vartheta \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine **σ-Algebra**, falls :

   (i) $\emptyset, X \in \vartheta$

   (ii) $A \in \vartheta \Longrightarrow X - A \in \vartheta$

   (iii) $A_n \in \vartheta$ für $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \vartheta$

   (es folgt : $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \vartheta$ für $A_n \in \vartheta$).

   Ist μ ein Maß auf X, so folgt aus 23.3 :

$$\boxed{\mathcal{M} := \Big\{ A \in \mathcal{P}(X) : A \ \text{ ist } \mu\text{-messbar} \Big\} \ \text{ ist } \sigma\text{-Algebra der } \mu\text{-messbaren Mengen.}}$$

Literatur : (Bauer)

In machen Büchern findet man folgenden **Zugang zur Maßtheorie** :

$(X, \mathcal{N}, \lambda)$ heißt **Maßraum**, falls $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ eine **σ-Algebra** ist und $\lambda : \mathcal{N} \longrightarrow [0, \infty]$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$,

(ii) $\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ für $A_n, A_m \in \mathcal{N}$ **paarweise disjunkt**

$\Big(X, \mathcal{M}, \mu\Big|_{\mathcal{M}}\Big)$ ist daher ein Maßraum.

Ist umgekehrt $\Big(X, \mathcal{N}, \lambda\Big)$ ein beliebiger Maßraum, so setzt man für $A \subset X$

$$\mu(A) := \inf \Big\{ \lambda(B) : A \subset B,\ B \in \mathcal{N} \Big\}.$$

μ ist dann ein Maß im Sinne von 23.1.

(Ich finde den Zugang über äußere Maße begrifflich einfacher).

Bis jetzt : alles sehr allgemein, nun betrachten wir

Definition 23.4 : Maße auf metrischen Räumen

Sei X ein **metrischer** *Raum.*

(a) Die σ-Algebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ ist die **kleinste** *σ-Algebra in X, die alle* **offenen** *Mengen enthält. Die Elemente von $\mathcal{B}$ heißen :* **Borel-Mengen** *(Konstruktion von $\mathcal{B}$ s.u)*

(b) Ein Maß μ auf X heißt **Borel-Maß***, falls* **alle** *Borel-Mengen μ-messbar sind.*

(c) Ein Borel-Maß auf X heißt **(Borel-)regulär***, falls es zu jeder Menge $A \subset X$ eine* **maßgleiche** *Borel-Obermenge B gibt : $\mu(A) = \mu(B)$ mit $A \subset B, B \in \mathcal{B}$.*

(d) Ein Borel-reguläres Maß heißt **Radon-Maß***, wenn* **kompakte** *Mengen $\subset X$* **endliches** *Maß haben.*

(e) Eine Menge $A \subset X$ heißt **$\boldsymbol{\sigma}$-endlich bzgl. eines Maßes $\boldsymbol{\lambda}$ auf** *X, wenn man schreiben kann $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ mit* **$\boldsymbol{\lambda}$-messbaren** *Mengen $B_k, \lambda(B_k) < \infty$.*

Bemerkungen :

(0) Die Volumenmessung im $\mathbb{R}^3$ ist z.B. ein Radon-Maß.

(1) **Borel-Mengen** $\hat{=}$ alle Mengen, die sich aus offenen und abgeschlossenen Mengen durch abzählbare Vereinigungen, Schnitte und Differenzen sowie Iteration dieser Konstruktionen erzeugen lassen.

Existenz von $\mathcal{B}$: setze $\mathcal{B} := \bigcap \vartheta, \vartheta = \sigma$-Algebra $\supset \{$ offene Mengen in $X\}$ ($\mathcal{P}(\mathcal{X})$ ist ein solches ϑ!)

(2) Borel (-regulär) Maße und Radon-Maße bringen Messbarkeit und Topologie in Verbindung : *offene/abgeschlossene Mengen sind messbar, für Radon Maße haben kompakte Mengen endliche Masse*

(3) Borel- und Radon-Maße kann man auch auf beliebigen topologischen Räumen definieren.

(4) Für (e) kann X irgendeine Menge sein, also nicht notwendig ein metrischer Raum.

(5) **Beschreibung der Borel-Regularität :**

Es gilt für ein Borel-Maß λ auf X :

$$\lambda \text{ Borel-regulär } \iff \lambda(A) = \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{B}, \mathcal{B} \supset \mathcal{A}\} \text{ für alle } \mathcal{A} \subset \mathcal{X}.$$

Beweis :

"$\Longrightarrow$" : klar!

"$\Longleftarrow$" : Sei $A \subset X$ gegeben.

Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $B_n \in \mathcal{B}, B_n \supset A, \lambda(B_n) - \frac{1}{n} \leq \lambda(A)$.

Sei $B := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$.

Dann : $\lambda(B) \leq (B_n) \leq \lambda(A) - \frac{1}{n}$, also $\lambda(B) \leq \lambda(A)$.

"$\geq$" folgt aus $A \subset B$.

6) **Sprechweise :** Sei X **irgendeine** Menge, λ ein Maß auf X.

λ heißt **reguläres Maß** :	$\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$	$\lambda(A) = \inf\{\lambda(B) : B \supset A,\ \boldsymbol{B\ \lambda}$ **-messbar**$\}$ für alle $A \subset X$
	$\overset{\text{vgl. (5), gl. Rechnung !}}{\Longleftrightarrow}$	für alle $A \subset X$ gibt es eine λ-messbare Menge $C \supset A$ mit $\lambda(A) = \lambda(C)$

Indem man A_n ersetzt durch maßgleiche λ-messbare Obermengen kann man zeigen bzw. die Aussage von 23.3 wie folgt verallgemeinern :

$$\{\lambda \text{ reguläres Maß, } A_n \subset A_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \Longrightarrow \lambda(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

Die A_n müssen also **nicht** λ-messbar sein.

Satz 23.3 :

Sei λ ein **Borel-reguläres** *Maß auf X und $A \subset X$ sei* **λ-messbar**. *Dann gilt :*

(i) A *Borel-Menge* $\Longrightarrow$ $\lambda\lfloor A$ **Borel-regulär**

(ii) $\underbrace{\lambda(A) < \infty}_{\textit{nicht notwendig Borel}}$ $\Longrightarrow$ $\lambda\lfloor A$ **Radon-Maß**, *also speziell auch Borel-regulär.*

Beweis :

Definiere $\nu := \lambda\lfloor A$.

Bemerkung 3) nach Definition 23.3 besagt :

> λ-messbare Mengen sind auch ν-messbar, also sind insbesondere alle Borel-Mengen ν-messbar und somit ist ν ein Borel-Maß.

Im Fall $\lambda(A) < \infty$ gilt :

> $\nu(K) = \lambda(A \cap K) \le \lambda(A) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subset X$.

<u>zu (i)</u> :

Sei A jetzt Borel-Menge.

zu zeigen : ν ist Borel-regulär $(*)$

d.h. : Zu $C \subset X$ finde Borel-Menge $D \supset C$ mit $\nu(C) = \nu(D)$.

bekannt :

λ Borel-regulär $\Longrightarrow \exists$ Borel-Menge $E \subset X$ mit $\lambda(E) = \lambda(A \cap C)$ und $A \cap C \subset E$.

Setze $D := E \cup (X - A)$

$\Longrightarrow D$ Borel-Menge und $C \subset (A \cap C) \cup (X - A) \subset E \cup (X - A) = D$

sowie $\quad \nu(D) = \lambda(D \cap A) \overset{\substack{D \cap A \subset E \\ \text{nach Def. v. } D}}{\leq} \lambda(E) = \lambda(A \cap C) = \nu(C)$

Die umgekehrte Richtung $\nu(D) \geq \nu(C)$ folgt aus $C \subset D$, also gilt $(*)$.

zu (ii) :

Sei $A \subset X$ nicht notwendig Borel-Menge, aber es gelte $\lambda(A) < \infty$.

Zu zeigen ist wieder $(*)$.

Zunächst existiert zu A eine maßgleiche Borel-Obermenge B (λ Borel-reguläres Maß).

Da A λ-messbar ist, folgt :

$$\lambda(B - A) = \lambda(B) - \lambda(A) = 0 \quad (\text{beachte : } B = A \,\dot{\cup}\, (B - A) \text{ sowie } \lambda(B) < \infty \text{ !})$$

Für $C \subset X$ beliebig ist deshalb

$$\begin{aligned}
\nu(C) = \lambda(A \cap C) \leq \lambda(B \cap C) &= (\lambda\lfloor B)(C) \\
&\overset{\substack{A\ \lambda\text{-messbar,} \\ B \cap C \text{ als Testmenge}}}{=} \lambda\left((B \cap C) \cap A\right) + \lambda\left((B \cap C) - A\right) \\
&\leq \lambda\left((B \cap C) \cap A\right) + \underbrace{\lambda(B - A)}_{=0} \\
&= \lambda\left((B \cap C) \cap A\right) \\
&\leq \nu(C)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \nu(C) = (\lambda\lfloor B)(C) \quad \forall\, C \subset X \quad \Longleftrightarrow \quad \nu = \lambda\lfloor B$

Nach (i) ist $\lambda\lfloor B$ Borel-regulär, also folgt $(*)$ für ν.

$\nu(K) < \infty$ für sogar alle $K \subset X$ ist klar.

$\square$

Satz 23.4 : Approximationssatz für Borel- und Radon-Maße

a) Sei X ein metrischer Raum und λ ein **Borel-Maß**. *Ist B* **Borel-Menge mit $\boldsymbol{\lambda(B) < \infty}$**, *so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine* **abgeschlossene Menge** *$C \subset X$ mit*

$$C \subset B \text{ und } \lambda(B - C) < \varepsilon.$$

b) Sei λ ein **Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$**. *Ist* $\boldsymbol{B}$ **Borel-Menge**, *so findet man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine* **offene** *Menge U mit*

$$B \subset U \text{ und } \lambda(U - B) < \varepsilon.$$

Für Radon-Maße auf $\mathbb{R}^n$ gilt noch mehr

Zusatz : (Radon-Maße auf $\mathbb{R}^n$)

Sei λ ein **Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$**. Dann gilt

(i) für **jede** Menge $A \subset \mathbb{R}^n : \lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : U \supset A$ **offen**$\}$

(ii) für jede **λ-messbare** Menge $A : \lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subset A$ **kompakt**$\}$

Beweisskizze von 23.4 :

a) $\nu := \lambda\lfloor B$ ist **endliches Borel-Maß**

(Bemerkung nach Def. 23.3 $\Rightarrow$ λ-messbare Mengen sind auch $\lambda\lfloor B$-messbar; also sind alle Borel-Mengen $\lambda\lfloor B$ messbar; Endlichkeit : klar!)

1.) Setze $\mathcal{F} := \{A \subset X : \begin{array}{l} A \text{ ist } \lambda\text{-messbar und zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es eine } \textbf{abgeschlossene} \\ \text{Menge } C_\varepsilon \text{ mit } C_\varepsilon \subset A \text{ und } \nu(A - C_\varepsilon) < \varepsilon \end{array} \}$
dann zeige :

- $\mathcal{F} \supset \{$ abgeschlossene Teilmenge von $X\}$ klar!
- $\mathcal{F}$ ist stabil gegen abzählbare $\bigcup$ und $\bigcap$
- $\mathcal{F} \supset \{$ offene Teilmengen von $X\}$
  (beachte dazu : U offen $\Longrightarrow U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{x \in U : \operatorname{dist}(x, X - U) \geq 1/i\}$ und $\{\ldots \geq \frac{1}{i}\}$ ist abgeschlossen)

2.) Sei $\mathcal{F}^* := \{A \in \mathcal{F} : X - A \in \mathcal{F}\}$.
Zeige : $\mathcal{F}^*$ ist stabil bzgl. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}$ und $\mathcal{F}^* \supset \{$ offene Mengen $\}$
Insgesamt :
$\mathcal{F}^*$ ist σ-Algebra $\supset \{$ offene Mengen in $X\} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{F}^* \supset \mathcal{B}}$.
Unsere Borel-Menge B aus Teil a) gehört also zu $\mathcal{F}^*$, was zu beweisen war.

Bemerkung :

Die Bildung von $\mathcal{F}^*$ ist nötig, da $\mathcal{F}$ nicht abgeschlossen bzgl. Bildung von Komplementen.

b) Jetzt : $X = \mathbb{R}^n$ und B Borel-Menge sowie λ Radon-Maß.

Sei $U_m := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < m\}$

$\Longrightarrow U_m - B$ ist Borel-Menge mit $\lambda(U_m - B) \leq \lambda(\overline{U}_m) < \infty$.

Hier geht ein, dass $X = \mathbb{R}^n$ ist. Andernfalls ist $\overline{U}_m$ nicht notwendig kompakt!
(und hat somit endliches Maß).

Nach a) gibt es eine **abgeschlossene** Menge C_m mit

$$C_m \subset U_m - B, \lambda((U_m - B) - C_m) = \lambda(U_m - C_m) - B) < \varepsilon 2^{-m}$$

wobei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben ist.

Die Mengen $U_m - C_m$ sind **offen**, also ist auch $U := \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (U_m - C_m)$ offen.

Es gilt (Wahl von C_m, d.h. $C_m \subset \mathbb{R}^n - B$) :

$$\begin{aligned} B \subset \mathbb{R}^n - C_m \quad & \Longrightarrow \quad U_m \cap B \subset U_m - C_m \\ & \overset{\text{Def.von } U_m}{\Longrightarrow} \quad B = \bigcup_{m=1}^{\infty} (U_m \cap B) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} (U_m - C_m) = U, \end{aligned}$$

d.h. U **offene Obermenge von B**. Für das Maß von $B - U$ bekommt man

$$\begin{aligned} \mu(U - B) &= \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (U_m - C_m) - B\right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left((U_m - C_m) - B\right) \quad \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \mu(B) = \inf\{\mu(V) : V \text{ offen } \subset B\}$

□

In der Praxis hat man es meistens mit Borel-Maßen oder sogar Radon-Maßen auf metrischen Räumen zu tun, und es stellt sich deshalb die Frage :
Wie entscheidet man schnell, ob ein gegebenes Maß diese Eigenschaft hat ?

Satz 23.5 : Kriterium von Carathéodory

Sei λ ein Maß auf dem metrischen Raum X. Gilt

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) \quad \forall A, B \subset X, \operatorname{dist}(A, B) > 0$$

so ist λ ein **Borel-Maß auf X**.

Beweis :

Es genügt zu zeigen, dass **alle abgeschlossenen Mengen** $C \in X$ messbar sind bzgl. λ, denn die messbaren Mengen bilden eine σ-Algebra, und jede σ-Algebra $\supset$ {abgeschlossene Mengen in X} umfaßt $\mathcal{B}$.

Für $A \subset X$ beliebig ist zu beweisen (bei fixierter abgeschlossener Menge C)

$$(*) \quad \lambda(A) \geq \lambda(A \cap C) + \lambda(A - C).$$

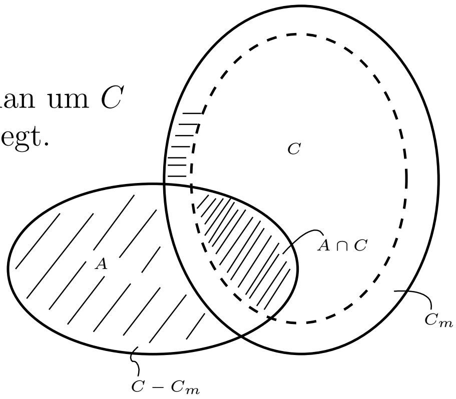
Dazu sei o.E. $\lambda(A) < \infty$. Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(A, B) &:= \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} \\ C_m &:= \{x \in X : \operatorname{dist}(x, C) \leq 1/m\} \end{aligned}$$

(die **äußere Parallelmenge** von C im Abstand $1/m$).

Man bekommt C_m, indem man um C einen Streifen der Breite $1/m$ legt.

Man bekommt C_m, indem man um C einen Streifen der Breite $\frac{1}{m}$ legt.



$$\Longrightarrow \quad \operatorname{dist}(A - C_m, A \cap C) \geq \tfrac{1}{m}$$

$$\overset{\text{Vor}}{\Longrightarrow} \quad (**) \quad \lambda(A - C_m) + \lambda(A \cap C) = \lambda((A - C_m) \cup (A \cap C)) \overset{\text{Mon.}}{\leq} \lambda(A),$$

denn $\quad (A - C_m) \cup (A \cap C) \subset A.$

Behauptung : $(\overset{*}{**}) \quad \lim\limits_{m \to \infty} \lambda(A - C_m) = \lambda(A - C)$

Setzt man dies in $(**)$ ein, so folgt $(*)$, also die Behauptungung.

ad $(\overset{*}{**})$: Sei für $k \in \mathbb{N}$

$$R_k := \left\{ x \in A : \tfrac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \tfrac{1}{k} \right\} \subset C_k$$

$$\Longrightarrow \quad A - C = (A - C_m) \cup \bigcup_{k=m}^{\infty} R_k$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda(A - C_m) \overset{C_m \supset C}{\leq} \lambda(A - C) \overset{\text{Vor.}}{\leq} \lambda(A - C_m) + \sum_{k=m}^{\infty} \lambda(R_k)$$

Man sieht :

$$\text{Ist } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(R_k) < \infty \text{ so folgt } (\overset{*}{**}) \text{ .}$$

Es gilt für $j \geq i + 2 \quad \operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0 \quad \underset{\text{+Ind.}}{\overset{\text{Vor}}{\Longrightarrow}}$

$$\left.\begin{array}{lcll} \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda(R_{2k}) & = & \lambda\left(\bigcup\limits_{k=1}^{m} R_{2k}\right) & \overset{\text{Mon.}}{\leq} \quad \lambda(A), \\ \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda(R_{2k+1}) & = & \lambda\left(\bigcup\limits_{k=0}^{m} R_{2k+1}\right) & \overset{\text{Mon.}}{\leq} \quad \lambda(A) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda(R_k) \leq 2\,\lambda(A) < \infty \quad \forall\, m$$

$\square$

Das Lebesgue - Maß $\mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$

ist für geometrische Anwendungen wie Volumenmessung das wichtigste Maß. Die Konstruktion ist analog zu der von $\mathcal{L}^1$ nur mit Quadern statt Intervallen.

Definition 23.5 :

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\mathcal{L}^n(A) := \inf \left\{ \sum_{i\in I} |Q_i| : \begin{array}{l} (Qi)_{i\in I} \textit{ ist höchstens abzählbare Überdeckung} \\ \textit{von } A \textit{ durch } \textbf{abgeschlossene} \textit{ Quader } Q_i \end{array} \right\}$$

das **sogenannte Lebesgue-Maß von $\boldsymbol{A}$**. *(genauer: n-dim. Lebesgue-Maß)*

$$\begin{array}{lrcl} \textit{Hier :} & Q & = & [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n], \\ & |Q| & := & (b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n). \quad \textit{“Elementarvolumen”} \end{array}$$

Bemerkungen :

1) **$\mathcal{L}^n$ist ein Maß auf $\mathbb{R}^n$.**
   Beweis wie für $\mathcal{L}^1$; Einzelheiten $\longrightarrow$ Übungen !

2) In der Definition kann man genauso **offene Quader** $W = (a_1,b_1) \times \ldots \times (a_n,b_n)$ oder **teilweise offene Quader** W benutzen, vorausgesetzt man setzt immer $|W| :=$ *Produkt der Kantenlängen.*

   Begründung :

   $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, $Q_i =$ abgeschlossener Quader. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben;
   bilde nun mit später zu definierendem ε_i

$$W_i := \left(a_1^i - \varepsilon_i,\, b_1^i + \varepsilon_i\right) \times \ldots \times \left(a_n^i - \varepsilon_i,\, b_n^i + \varepsilon_i\right),$$

   wenn

$$Q_i = [a_1^i, b_1^i] \times \ldots \times [a_n^i, b_n^i]$$

   dann folgt :

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \text{ mit offenen Quadern } W_i$$

   und

$$\sum_{i=1}^{\infty} |W_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(b_j^i - a_j^i + 2\varepsilon_i\right) \;;$$

   gemäß

$$\prod_{j=1}^{n} \left(b_j^i - a_j^i + 2\varepsilon_i\right) \le \prod_{j=1}^{n} \left(b_j^i - a_j^i\right) + 2\cdot\varepsilon_i\cdot 2^{n-1} \max_{j=1\ldots n} \{1, b_j^i - a_j^i\}^{n-1}$$

folgt

$$|W_i| \leq |Q_i| + 2^{-i}\varepsilon\,,$$

wenn man von ε_i verlangt

$$2\varepsilon_i 2^{n-1} \max_{j=1\ldots n}\{1, b_j^i - a_j^i\}^{n-1} \leq 2^{-i}\varepsilon$$

Insgesamt :

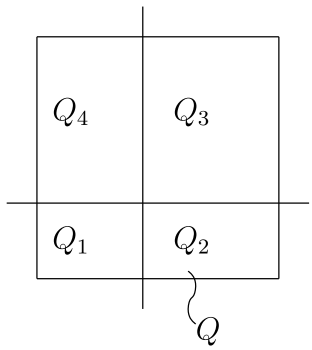
$$\sum_{i=1}^{\infty} |W_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| + \varepsilon\,,$$

so dass

$$\inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |W_i| : \ldots W_i \text{ offen } \ldots\} = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| : \ldots Q_i \text{ abgeschlossen } \ldots\}\,.$$

3) Ist Q ein Quader und zerlegt man diesen durch Schnitte mit achsenparallelen Hyperebenen in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_N$, so gilt :

$$|Q| = \sum_{i=1}^{N} |Q_i|$$



$\Longrightarrow$ **bei der Definition von $\mathcal{L}^n(A)$kann man mit Quadern (sogar Würfeln !) arbeiten, deren Kantenlängen unterhalb einer beliebig kleinen vorgegebenen Schranke liegen :**

$$\boxed{\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{\sum_{i\in I} |Qi| : \begin{array}{l}(Qi)_{i\in I} \text{ ist Quaderüberdeckung von } A \text{ mit Quadern} \\ \text{(oder Würfeln) der } \textbf{Kantenlänge} \leq \boldsymbol{\delta}\end{array}\right\}.}$$

4) Für Quader Q (abgeschlossen, offen, halboffen) gilt stets

$$\boxed{\mathcal{L}^n(Q) = |Q|}$$

Beweis : wie für $\mathcal{L}^1$!

Satz 23.6 : (Eigenschaften von $\mathcal{L}^n$)

(i) *Für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mathcal{L}^n(A) = \inf\{\mathcal{L}^n(U) : U \text{ offen} \supset A\}$.*

(ii) *$\mathcal{L}^n$ ist ein* **Radon-Maß**.

(iii) **Translationsinvarianz :** $\mathcal{L}^n(b + A) = \mathcal{L}^n(A) \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^n, A \subset \mathbb{R}^n$

(iv) **Homogenität vom Grad n :** $\mathcal{L}^n(r \cdot A) = r^n \mathcal{L}^n(A) \quad \forall\, r \geq 0, A \subset \mathbb{R}^n$

(v) *Seien $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ und $T(x) = (r_1 x_1, \ldots, r_n x_n)$. Dann gilt :*

$$\mathcal{L}^n(T(A)) = |r_1 \ldots r_n| \cdot \mathcal{L}^n(A). \ (\textit{beachte : } \det T = r_1 \ldots r_n)$$

Beweis :

(i) für $\mathcal{L}^n(A) = \infty$ klar !

Sei also $\mathcal{L}^n(A) < \infty$.

Nach Bemerkung 2) im Anschluß an Definition 23.5 gilt :

zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es **offene Quader** $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j =: U \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} |P_j|.$$

U ist **offen** mit

$$\mathcal{L}^n(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |P_j| \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon.$$

Da umgekehrt offenbar $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(U)$ gilt, folgt (i).

(ii) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ **kompakt**

$\Longrightarrow \exists$ Quader Q mit $K \subset Q$

$\Longrightarrow \mathcal{L}^n(K) \leq \mathcal{L}^n(Q) = |Q| < \infty$.

Mit Carathéodory's Kriterium zeigen wir, dass $\mathcal{L}^n$ Borel-Maß ist :

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. O.E. $\mathcal{L}^n(A \cup B) < \infty$, sonst ist nichts zu zeigen.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben

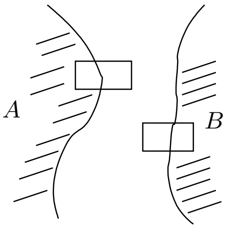
$\Longrightarrow$ $\exists$ Quaderüberdeckung von $A \cup B$ mit Quadern Q_j
der Kantenlängen $\leq \delta$ (wird später fixiert) mit

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq \mathcal{L}^n(A \cup B) + \varepsilon$$

Sei $J \subset \mathbb{N}$ definiert durch $\quad j \in J \Longleftrightarrow Q_j \cap (A \cup B) \neq \emptyset$.

Dann ist auch $(Q_j)_{j \in J}$ Überdeckung von $A \cup B$.

Sei $\delta = \frac{1}{2\sqrt{n}} \operatorname{dist}(A, B)$.



Dann ist für Q_j, $j \in J$, entweder $Q_j \cap A \neq \emptyset$ und $Q_j \cap B = \emptyset$ oder umgekehrt.
Sei $J_1 := \{j \in J : Q_j \cap A \neq \emptyset\}$, $J_2 := \{j \in J : Q_j \cap B \neq \emptyset\}$

$$\Longrightarrow \quad J = J_1 \cup J_2,\; J_1 \cap J_2 = \emptyset,$$
$$(Q_j)_{j \in J_1} \text{ ist Überdeckung von } A,\; (Q_j)_{j\in J_2} \text{ ist Überdeckung von } B$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B) &\leq \sum_{j \in J_1} |Q_j| + \sum_{j \in J_2} |Q_j| \\ &= \sum_{j\in J} |Q_j| \\ &\leq \mathcal{L}^n(A \cup B) + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(A \cup B),$$

und die umgekehrte Ungleichung folgt aus der Monotonie.

Nachzuweisen : **Borel-Regularität von $\mathcal{L}^n$**

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Nach (i) gibt es eine Folge U_i offener Mengen mit

$$U_k \supset A, \quad \mathcal{L}^n(A) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(U_k).$$

$B := \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ ist Borel-Menge (also messbar), $B \supset A$, mit

$$\mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(U_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}^n(A), \text{ d.h. } \mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(A).$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt trivial, also ist B maßgleiche Borel-Obermenge zu A.

(iii) $\quad (Q_j)_{j\in J}$ abzählbare Quaderüberdeckung von A

$\Longrightarrow \quad (b + Q_j)_{j \in J}$ abzählbare Quaderüberdeckung von $b + A$

außerdem $\quad |b + Q_j| = |Q_j|$, da die Kantenlängen gleich sind $\Longrightarrow \mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(b + A)$.

(iv) ist Spezialfall von

(v) Sei (Q_j) Quaderüberdeckung von $A \Longrightarrow (TQ_j)$ ist Quaderüberdeckung von TA mit

$$\sum_{j\in J} |TQ_j| = |r_1 \ldots r_n| \cdot \sum_{j \in J} |Q_j|,$$

denn ist

$$Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

so gilt

$$TQ = [\alpha_1, \beta_1] \times \ldots \times [\alpha_n, \beta_n] \text{ mit } \alpha_k \leq \beta_k,\ \{\alpha_k, \beta_k\} = \{r_k a_k, r_k \cdot b_k\}.$$

Es folgt

$$\mathcal{L}^n(TA) \leq |r_1 \ldots r_n| \mathcal{L}^n(A) \quad (*)$$

Ist ein $r_i = 0$, so gilt ,,=" direkt (vgl. nachfolgende Bem.).
Sind alle $r_i \neq 0$, so setze

$$Sx := \left(\frac{1}{r_1} x_1, \ldots, \frac{1}{r_n} x_n \right).$$

Es gilt $(*)$ für S statt T und TA statt A, d.h.

$$\mathcal{L}^n\left(S(TA)\right) \leq |\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_n}| \mathcal{L}^n(TA).$$

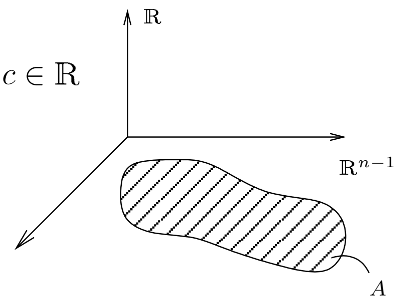
Gemäß $S \cdot T = Id$ folgt die Behauptung.

$\square$

Folgerung :

$$A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_k = c\} \text{ für ein } k \in \{1, \ldots, n\},\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}^n(A) = 0$$



denn : nach Translation o.E. $c = 0$.

Sei $T(x) = (x_1 \ldots x_{k-1}\, 0\, x_{k+1} \ldots x_n) \quad \Longrightarrow \quad TA = A$ und $\mathcal{L}^n(TA) = 0 \cdot \mathcal{L}^n(A) = 0$.

Bemerkung :

hier zunächst $\mathcal{L}^n(A) < \infty$, da sonst Term der Form $0 \cdot \infty$ auftritt;
falls $\mathcal{L}^n(A) = \infty \quad \Longrightarrow \quad$ betrachte $A_m = A \cap \{x : |x| \leq m\}$

$\square$

Wir bemerken, dass $\mathcal{L}^n$ weitgehend durch die Aussagen von Satz 23.7 eindeutig festgelegt wird.

Satz 23.7 : Eindeutigkeit von $\mathcal{L}^n$

$\mathcal{L}^n$ *ist das* **einzige Maß** λ *auf* $\mathbb{R}^n$ *mit*

(i)	**Translationsinvarianz :**	$\lambda(b + A) = \lambda(A) \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^n,\ A \subset \mathbb{R}^n$
(ii)	**Additivität auf Quadern :**	*Für* **disjunkte** *Quader* $\subset \mathbb{R}^n$ *gilt* $\lambda(Q_1 \cup Q_2) = \lambda(Q_1) + \lambda(Q_2)$
(iii)	**Normierung :**	$\lambda([0,1]^n) = 1$
(iv)	**Regularität :**	$\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : A \subset U \text{ offen}\} \quad \forall\, A \subset \mathbb{R}^n$

Beweis : -

Bemerkung :

(i), (ii), (iv) legen $\mathcal{L}^n$ bis auf einen Faktor $\alpha \geq 0$ fest. Es ist $\alpha = \lambda([0,1]^n)$.

□

Unser geometrisches Maß $\mathcal{L}^n$ sollte invariant gegenüber Drehungen sein, denn Drehungen verändern ja anschaulich das Volumen nicht. Das läßss t sich sehr einfach beweisen, wenn man $\mathcal{L}^n$ mit Hilfe von **Kugelüberdeckungen** charakterisiert. Zur Vorbereitung dient ein

Topologisches Lemma :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ mit abgeschlossenen achsenparallelen Würfeln W_i, **deren Inneres paarweise disjunkt ist**.

Beweis :

Sei $m \in \mathbb{N}_\circ$ und $\mathcal{F}_m := 2^{-m}\mathbb{Z}^n = \{2^{-m}(\ell_1, \ldots, \ell_n) : \ell_i \in \mathbb{Z}\}$
$\rightsquigarrow$ induziert Zerlegung von $\mathbb{R}^n$ in abzählbar viele, abgeschossene, achsenparallele Würfel der Kantenlänge 2^{-m}.

Definiere nun folgende Mengen:

$\mathcal{W}^\circ := \{W_i^\circ : i \in I_\circ\}$ Menge der Würfel aus $\mathcal{F}_\circ$, die ganz in U liegen

$\rightsquigarrow I_\circ \simeq \mathbb{N}$ oder $\# I_\circ < \infty$;

$U_1 := U - \bigcup_{i \in I_\circ} W_i^\circ$ offen

$\mathcal{W}^1 := \{W_i^1 : i \in I_1\}$ Menge der Würfel aus $\mathcal{F}_1$, die ganz in U_1 liegen

$\rightsquigarrow I_1 \simeq \mathbb{N}$ oder $\# I_1 < \infty$;

induktiv: $U_{m+1} := U_m - \bigcup_{i \in I_m} W_i^m,$

$\mathcal{W}^{m+1} := \{W_i^{m+1} : i \in I_{m+1}\}$ Würfel aus $\mathcal{F}_{m+1}$, die ganz in U_{m+1} liegen

$\mathcal{W} := \left(W_i^j\right)_{j \in \mathbb{N}_\circ, i \in I_j}$ System von Würfeln mit paarweise disjunktem Inneren es gilt:

$$U = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{i \in I_j} W_i^j$$

□

Wir benutzen das topologische Lemma zum Beweis von

Maßtheoretisches Lemma :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ **offen** und **beschränkt**. Dann gibt es **abzählbar viele, paarweise disjunkte, abgeschlossene** Kugeln $B_i \subset U$ mit

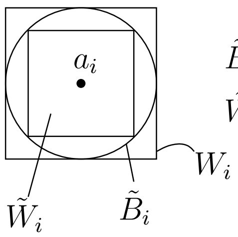
$$\mathcal{L}^n(U) = \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i)$$

Bemerkung :

Es gilt im allgemeinen nicht $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ sondern nur $\mathcal{L}^n\left(U - \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = 0$, d.h. **die Kugel B_i schöpfen U nur bis auf eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge aus**.

Beweis :

Wir schreiben nach dem vorigen Lemma $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ mit Würfel W_i, deren Inneres paarweise disjunkt ist, α_i = Kantenlänge W_i, a_i = Mittelpunkt von W_i.



$\tilde{B}_i$ = Innenkugel zu W_i um a_i mit Radius $\frac{\alpha_i}{2}$

$\tilde{W}_i$ = achsenparallele Würfel um a_i in $\tilde{B}_i$ mit Kantenlänge $\frac{\alpha_i}{\sqrt{n}}$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}^n(\tilde{B}_i) > \mathcal{L}^n(\tilde{W}_i) = \left(\frac{\alpha_i}{\sqrt{n}}\right)^n = n^{-n/2}\mathcal{L}^n(W_i)$$

Ersetze $\tilde{B}_i$ durch eine etwas kleinere konzentrische Kugel B_i mit

$$\mathcal{L}^n(B_i) > n^{-n/2}\mathcal{L}^n(W_i).$$

Beachte : die B_i sind jetzt disjunkt!
Außerdem sei B_i abgeschlossen. Dann gilt einerseits

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\overset{o}{W}_i\right) \overset{\text{disj. Inneres}}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^n(\overset{o}{W}_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^n(W_i) \geq \mathcal{L}^n(U), \text{ da } \bigcup W_i \supset U,$$

und andererseits

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\overset{o}{W}_i\right) \leq \mathcal{L}^n(U) \text{ wegen der Monotonie.}$$

Also folgt

$$\infty > \mathcal{L}^n(U) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^n(W_i), \text{ so dass die Reihe rechts konvergiert.}$$

Sei $U_1 := U$, $U_2 := U_1 - \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$ offen, wobei m später gewählt wird.
Es gilt :

$$U_2 = \bigcup_{i=m+1}^{\infty} W_i \cup \bigcup_{i=1}^{m}(W_i - B_i)$$

$$\begin{aligned} \overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{L}^n(U_2) &= \sum_{i=m+1}^{\infty}\mathcal{L}^n(W-I) + \sum_{i=1}^{m}\left(\mathcal{L}^n(W_i) - \mathcal{L}^n(B_i)\right) \\ &= \Big[\sum_{i=m+1}^{\infty}\ln(W_i) + \sum_{i=1}^{m} n^{-N/2}\mathcal{L}^n(W_i) - \ln(B_i\Big] + \sum_{i)1}^{m}(1-n^{-N/2})\mathcal{L}^n(W_i). \end{aligned}$$

Es ist $n^{-n/2}\mathcal{L}^n(W_i) - \mathcal{L}^n/(B_i) < 0$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad & [\ldots] + \sum_{i=1}^{m}\left(1-n^{-n/2}\right)\mathcal{L}^n(Wi) \\ < \quad & \Big\{\sum_{i=m+1}^{\infty}\mathcal{L}^n(W_i) + \underbrace{n^{-n/2}\mathcal{L}^n(W_1) - \ln(B_1)}_{<0}\Big\} + \sum_{i=1}^{m}\left(1-n^{-n/2}\right)\mathcal{L}^n(W_i) \end{aligned}$$

Da die Reihe konvergiert, gibt es ein N_1 mit $\{\ldots\} < 0\ \forall\, m \geq N_1$.
Sei $m = N_1$ und U_2 mit diesem m definiert. Dann ist

$$\mathcal{L}^n(U_2) \leq \sum_{i=1}^{m}(1-n^{-n/2})\,\mathcal{L}^n(W_i) \leq \left(1-n^{-n/2}\right)\mathcal{L}^n(U_1).$$

Definiere rekursiv offene Mengen $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$
(wiederhole die Konstruktion mit U_2, statt U_1, usw. !)

mit $\boxed{\mathcal{L}^n(U_{k+1}) \leq \left(1 - n^{-n/2}\right) \mathcal{L}^n(U_k)}$

Es gilt in jedem Schnritt :

$$U_{k+1} = U_k - \bigcup \text{ endlich viele, abgeschlossene, disjunkte Kugeln } \subset U_k.$$

Sei $\{K_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung der disjunkten, abgeschlossenen Kugeln, die in jedem Schritt entfernt werden

$$\Longrightarrow \quad U = U_k \cup \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_\ell \quad \forall\, k$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}^n(U) \leq \mathcal{L}^n(U_k) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(K_\ell).$$

Mit $\quad \mathcal{L}^n(U_k) \leq \left(1 - n^{-n/2}\right)^{k-1} \mathcal{L}^n(U_1) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$

folgt $\quad \mathcal{L}^n(U) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(K_\ell),$

denn „$\geq$" ist wegen $K_\ell \subset U$ und der Disjunktheit von K_ℓ trivial.

□

Mit Hilfe des vorstehenden Lemmas beweisen wir jetzt

Satz 23.8 : (weitere Eigenschaften von $\mathcal{L}^n$)

(i) *Für $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mathcal{L}^n(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i) : \ B_i$ Kugeln mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\}$.*

(ii) *Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$ ist $\mathcal{L}^n(f(A)) \leq L^n \cdot \mathcal{L}^n(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$*

(iii) *Ist $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine* **Isometrie**, *also $Tx = x_\circ + Sx$ mit einer* **orthogonalen** *Abbildung S, so gilt für $A \subset \mathbb{R}^n$: $\quad \mathcal{L}^n(TA) = \mathcal{L}^n(A)$.*

(iv) *Ist $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$* **linear** *und $A \subset \mathbb{R}^n$, so ist*

$$\mathcal{L}^n(LA) = |\det L| \cdot \mathcal{L}^n(A).$$

(v) *Ist $m < n$, so sind $m - \dim$ Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-Nullmengen.*
(Aus (v) folgt u.a., dass es in (i) egal ist, ob die Kugel offen oder abgeschlossen sind.)

Bemerkung :

Hier zeigt sich der Vorteil, Maße auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ zu definieren und nicht nur auf gewissen σ-Algebren $\mathfrak{M}$. Man hätte dann nämlich zu zeigen, ob in (ii) $\ f(A) \in \mathfrak{M}$ gilt für $A \in \mathfrak{M}$.

Beweis von Satz 23.8 :

(i) $\mathcal{L}^n(A) = \infty \quad \surd$

Sei zunächst A offen und beschränkt

$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \quad \exists$ disjunkte, abgeschlossene Kugeln $\tilde{B}_i \subset A, \in \mathbb{N}$, mit $\mathcal{L}^n(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\tilde{B}_i)$

$C := A - \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i$ ist $\mathcal{L}^n$-Nullmenge

$\Longrightarrow$ zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine **Würfelüberdeckung** $C \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} W_j$ mit $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(W_j) < \varepsilon$.

Zu W_j bilde die **Umkugel** B_j^* mit Radius $\frac{1}{2}\operatorname{diam} W_j$.

Wegen der Homogenität von $\mathcal{L}^n$ folgt (beachte : $\mathcal{L}^n(W_j) = \big(\frac{\operatorname{diam} W_j}{\sqrt{n}}\big)^n$)

$$\mathcal{L}^n(B_j^*) = \mathcal{L}^n(B_1) \cdot \big(\frac{1}{2}\operatorname{diam} W_j\big)^n = \omega_n \frac{n^{n/2}}{2^n} \mathcal{L}^n(W_j), \text{ wobei } \omega_n := \mathcal{L}^n(B_1).$$

Damit ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_j^*) \leq \omega_n 2^{-n} n^{n/2} \varepsilon.$$

Die Kugeln $\tilde{B}_i$ bilden zusammen mit den Kugeln B_j^* eine Überdeckung von A und daher

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\tilde{B}_i) + \sum_{J=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_j^*) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon \cdot 2^{-n} n^{n/2} \cdot \omega_n.$$

Wegen der Beliebigkeit von ε folgt die Behauptung.

A beliebig : überdecke A durch offene Quader Q_i bis auf ein ε und benutze den ersten Beweisteil für Q_i.

(ii) o.E. $L > 0$ und $\mathcal{L}^n(A) < \infty$; für $B_r(x_\circ) \subset \mathbb{R}^n$ ist $f(B_r r(x_\circ)) \subset B_{Lr}(f(x_\circ))$.

Man wähle eine **Kugelüberdeckung** $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(x_i)$ mit $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{r_i}(x_i)) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon$

$$\Longrightarrow \qquad f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{Lr_i}(f(x_i))$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(f(A)) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{Lr_i}(f(x_i))) \\ &\overset{\text{Homog. + Translationsinv.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} L^n \cdot \mathcal{L}^n(B_{r_i}(x_i)) \\ &\leq L^n \cdot (\mathcal{L}^n(A) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt die Behauptung.

(iii) Da wir bereits Translationsinvarianz wissen, sei T o.E. eine **orthogonale** Abbildung, also $|Tx - Ty| = |x - y|$. Aus (ii) folgt

$$\mathcal{L}^n(TA) \leq 1^n \cdot \mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(T^{-1}(TA)) \leq \mathcal{L}^n(TA),$$

da auch T^{-1} **orthogonal**.

(iv) Sei L **linear**. Dann gilt ($\rightarrow$ **Polarzerlegung** der Linearen Algebra)

$$L = O_1 D O_2$$

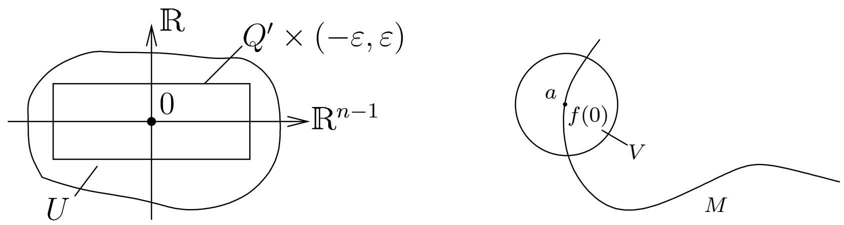
mit **orthogonalen** Abbildung O_1, O_2 und einer Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^n(L(A)) = \mathcal{L}^n(0_1(DO_2(A))) = \mathcal{L}^n(DO_2(A)) \\ \overset{\text{früheres Ergebnis}}{=} \quad & |r_1 \ldots r_n| \cdot \mathcal{L}^n(0_2(A)) = |r_1 \ldots r_n| \cdot \mathcal{L}^n(A) = |\det L| \cdot \mathcal{L}^n(A). \end{aligned}$$

(v) Sei M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit $\dim = n - 1$.
Zu zeigen : $\mathcal{L}^n(M) = 0$



$$\begin{aligned} U &= \text{offene Umg. von } 0 in \mathbb{R}^n, \\ V &= \text{offene Umg. von } Q := f(0) \text{ in } \mathbb{R}^n, \\ & \quad f : U \to V \text{ Diffeomorphismus mit } f(0) = a \text{ und } f(U \cap \mathbb{R}^{n-1}) = M \cap V \\ Q' &= \text{Quader in } \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & f(Q') \subset f(Q' \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \\ \Longrightarrow \quad & \mathcal{L}^n(f(Q')) \leq \text{Lip}(f)^n \cdot \mathcal{L}^n(Q' \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \leq \text{Lip}(f)^n \cdot \text{const} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt

$$\mathcal{L}^n\left(f(Q')\right) = 0 \implies \mathcal{L}^n\left(f(U \cap \mathbb{R}^{n-1})\right) = 0 \implies \mathcal{L}^n\left(M \cap V\right) = 0.$$

$\square$