24

Meßbare Funktionen

bilden die Grundlage der Integrationstheorie.

Definition 24.1 :

> *Sei X eine* **beliebige Menge**, *Y ein* **topologischer** *Raum, λ ein Maß auf X.*
> *$f : X \to Y$ heißt* **λ-messbar**, *falls $f^{-1}(\Omega)$ λ-messbar ist für alle* **offenen** $\Omega \subset Y$.

Bemerkungen :

1) Sei $\vartheta := \{A \subset Y : f^{-1}(A)$ ist λ-messbar $\}$.

   Rechenregeln für Urbilder $\Longrightarrow$ $\vartheta \subset \mathcal{P}(Y)$ ist eine **σ-Algebra**, die per Definition die offenen Mengen in Y umfaßt.

   Also : $\boxed{\text{Borel-Mengen in } Y \subset \vartheta}$

2) λ Borel-Maß auf X (**metr. Raum**), $f : X \to Y$ **stetig**

   $\Longrightarrow$ f ist λ-messbar, denn f-Urbilder offener Mengen in Y sind offen in X.

   (Analyse der Stetigkeitseigenschaften messbarer f $\Longrightarrow$ vgl. Satz 24.3)

3) Sei $M \subset X$. Dann gilt: ($\to$ Übung !)

   $$\boxed{\chi_M : X \to \mathbb{R} \;\; \lambda\text{-messbar} \quad \Longleftrightarrow \quad M \;\; \lambda\text{-messbar}}$$

   $$\chi_M(x) := \begin{cases} 0, & x \notin M \\ 1, & x \in M \end{cases}$$

4) **Kriterium für reellwertige Abbildungen :**

   Sei λ ein Maß auf einer beliebigen Menge X und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt :

   $$f \;\; \lambda\text{-messbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} f^{-1}((-\infty, t]) \;\text{ oder }\; f^{-1}([s,t]),\; s,\, t \in Q \\ \lambda\text{-messbar } \;\textbf{für alle}\; t \in \mathbb{Q}, \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{c} \text{analog mit} \\ \text{offenen Intervallen} \end{array} \right)$$

denn aus dem System $(-\infty, t]$, $t \in \mathbb{Q}$, kann man alle offenen Mengen $\subset \mathbb{R}$ durch abzählbare Schritte, Vereinigungen und Differenzen erzeugen. Entsprechendes gilt für das System $[s, +\infty)$, $s \in \mathbb{Q}$.

5) Es ist zweckmäßig, auch Funktionen

$$f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

zu betrachten, d.h. $f(x) \in \{\pm\infty\}$ ist möglich.

Dabei wird $\overline{\mathbb{R}}$ mit seiner natürlichen Ordnung $-\infty < x < \infty$, $x \in \mathbb{R}$, versehen und wir sagen :

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ist } \lambda\text{-messbar} \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f^{-1}(\{-\infty\}),\ f^{-1}(\{+\infty\}),\ f^{-1}(I) \ \ (I \text{ offen } \subset \mathbb{R}) \\ \qquad\qquad \lambda\text{-messbar.} \end{cases}$$

Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ treten z.B. als Limiten von Folgen $f_n : X \to \mathbb{R}$ auf.

Satz 24.1 : (Rechenregeln für messbare Funktionen)

Sei λ Maß auf X.

(i) Sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ λ-messbar, so auch $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$, $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$. Für $g \neq 0$ hat man λ-Meßbarkeit von f/g.

(ii) Sei $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge λ-messbarer Funktionen. Dann sind $\inf\limits_k f_k$, $\sup\limits_k f_k$, $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$, $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k$ λ-messbar.

(iii) Seien Y, X topologische Räume, $g : Y \to Z$ stetig und $f : X \to Y$ λ-messbar. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ λ-messbar.

(iv) $f : X \to \mathbb{R}^n$ λ- messbar $\Longleftrightarrow$ jede Komponente λ-messbar

Bemerkung :

In (i) darf man $\overline{\mathbb{R}}$ als Bild nur dann zulassen, wenn keine Ausdrücke vom Typ $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ auftreten. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $g : X \to \mathbb{R}$ ist für $f + g$ möglich.

Beweis :

(i) Es ist für $a \in \mathbb{R}$

$$(*) \quad (f+g)^{-1}(-\infty, a) = \bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q} \\ r+s<a}} \left(f^{-1}(-\infty, r) \cap g^{-1}(-\infty, s)\right),$$

woraus λ-Meßbarkeit von $f + g$ folgt.

Beweis von $(*)$:

„$\subset$" :

$$x \in (f+g)^{-1}(-\infty,a) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)+g(x) < a$$

Setze $\varepsilon := a - (f(x)+g(x)) > 0$ und wähle $r,s \in \mathbb{Q}$

mit $f(x) < r < f(x) + \frac{\varepsilon}{3}, \quad g(x) < s < g(x) + \frac{\varepsilon}{3}$

$$\Longrightarrow \quad x \in f^{-1}(-\infty,r) \cap g^{-1}(-\infty,x)$$

und

$$\begin{aligned} r+s < f(x)+g(x)+\tfrac{2}{3}\varepsilon &= \tfrac{2}{3}\left(a-(f(x)+g(x))\right)+f(x)+g(x) \\ &= \tfrac{2}{3}a+\tfrac{1}{3}\left(f(x)+g(x)\right) < a. \end{aligned}$$

„$\supset$" :

Sei $f(x) < r$, $g(x) < s$ für $r,\ s \in \mathbb{Q}$, $r+s < a$. Dann :

$$f(x)+g(x) < r+s < a \quad \Longrightarrow \quad x \in (f+g)^{-1}(-\infty,a).$$

Wir zeigen λ-Meßbarkeit von f^2:

$$a \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad (f^2)^{-1}(-\infty,a) \quad = \quad f^{-1}(-\infty,\sqrt{a}) \quad - \quad f^{-1}(-\sqrt{a},\infty)$$

λ-messbar

$$a < 0 \quad \Longrightarrow \quad (f^2)^{-1}(-\infty,a) \quad = \quad \emptyset$$

Daraus folgt λ-Meßbarkeit von $f \cdot g$, denn

$$f \cdot g = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right],$$

d.h. $f \cdot g$ ist Summe von Quadraten und damit messbar.

Rest von (i) : $\rightarrow$ Übung!

Bemerkung :

$$\begin{aligned} f^+ &:= f \cdot \chi_{f^{-1}([0,\infty))}, \qquad \text{ist } \lambda\text{-messbar} \\ f^- &:= -f \cdot \chi_{f^{-1}((-\infty,0])} \qquad \text{-} \end{aligned}$$

für λ-messbare f, da $f^{-1}(\ldots)$ λ-messbar. Daraus folgt λ-Meßbarkeit von

$$|f| = f^+ + f^-,\ \max\{f,g\} = (f-g)^+ + g,\ \min\{f,g\} = -(f-g)^- + g.$$

Weiter im Beweis von 24.1 :

(ii) Seien $f_k : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ λ-messbar

$$\Longrightarrow \quad \left(\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)^{-1}([-\infty,a)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}([-\infty,a))$$

$$\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)^{-1}([-\infty,a]) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}([-\infty,a])$$

$$\Longrightarrow \quad \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k,\ \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \text{ sind } \lambda\text{-messbar}$$

(Diese Funktionen können durchaus $\equiv -\infty$ bzw. $+\infty$ sein!)

Gemäß

$$\begin{aligned} \liminf_{k\to\infty} f_k &= \sup_{m\geq 1} \{\inf_{k\geq m} f_k\}, \\ \limsup_{k\to\infty} f_k &= \inf_{m\geq 1} \{\sup_{k\geq m} f_k\} \end{aligned}$$

folgend daraus die anderen Behauptungen von (ii).

Spezialfall :

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ existiert für } x \in X \quad \Longrightarrow \quad f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ ist } \lambda\text{-messbar.}$$

(iii) (iv) $\rightarrow$ **Übung!**

$\square$

Satz 24.2 : Zerlegung messbarer Funktionen ≥ 0

Sei λ ein Maß auf der Menge X, $f : X \longrightarrow [0,\infty]$ sei λ-messbar.
Zu jeder Folge $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$r_k > 0, \quad r_k \to 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} r_k = \infty$$

gibt es eine Folge $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ **λ-messbarer Teilmengen von X** *mit*

$$\boxed{f = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cdot \chi_{A_k}.} \quad \leftarrow \quad (\textbf{punktweise Konvergenz!})$$

Spezialfall : $r_k = 1/k.$

Beweis :

Sei $r_k = 1/k$, die allgemeine Aussage folge genauso. Setze induktiv

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{x \in X : f(x) \geq 1\}, \\ A_k &:= \{x \in X : f(x) \geq \tfrac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \tfrac{1}{j}\chi_{A_j}(x)\}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

1.) Es gilt:

$$f \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ \chi_{A_k}$$

<u>Fall 1</u> : $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x)$

<u>Fall 2</u> : $x \in A_k$ für **nur endlich** viele k.

Sei $k_\circ := \max\{k \in \mathbb{N} : x \in A_k\}$. Dann ist $x \in A_{k_\circ}$

$$\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} f(x) \geq \frac{1}{k_\circ} + \sum_{j=1}^{k_\circ - 1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{k_\circ} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x).$$

<u>Fall 3</u> : $x \in A_{k_m}$ für eine Folge $k_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Zu jedem $N \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k_m \geq N$, also

$$\begin{aligned} f(x) \quad &\overset{x \in A_{k_m}}{\geq} \quad \frac{1}{k_m} + \sum_{j=1}^{k_m - 1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{k_m} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) \\ &\geq \quad \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) \end{aligned}$$

Mit $N \to \infty$ folgt die Behauptung aus 1.).

2.) Ist $f(x) = \infty$, so folgt $x \in A_k$ für alle k, also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = f(x)$$

Im Fall $f(x) < \infty$, gilt $x \notin A_n$ für unendlich viele n
(sonst Widerspruch zu 1.) und der Divergenz der harm. Reihe).

Für jedes solche n ist per Def. von A_n

$$f(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) \leq \frac{1}{n}$$

Nach 1.) ist die linke Seite ≥ 0, $n \to \infty$ ergibt die Behauptung

$\square$

<u>Wir wissen</u> : λ Borel Maß auf $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ stetig $\Longrightarrow f$ λ-messbar.

Was kann man über die Stetigkeitseigenschaften messbarer Funktionen aussagen ?

Meßbare Funktionen lassen sich dem Maße nach durch stetige Funktionen approximieren bzw. sind bereits größtenteils stetig.

Satz 24.3 : (von Lusin)

Sei λ ein Borel-reguläres Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ λ-messbar. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ λ-messbar mit $\lambda(A) < \infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine **kompakte** *Menge $K = K_\varepsilon$ mit $K \subset A$ und $\lambda(A - K) < \varepsilon$, so dass $f|_k : K \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig ist.*
(Das bedeutet nicht, dass f an jeder Stelle $x_\circ \in K$ stetig ist, lediglich $f|_K$ hat diese Eigenschaft.)

Bemerkung :

Allgemeine Versionen finden sich bei Federer, 2.3.5.

Beweis :

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ zerlege den Bildraum in der Form

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}$$

mit **disjunkten** Borel-Mengen B_{ij} (d.h. $B_{i\ell} \cap B_{ik} = \emptyset$ für $\ell \neq k$),
wobei $\operatorname{diam} B_{ij} < \frac{1}{i}$ (konkret: Würfelzerlegung von $\mathbb{R}^N$).
[Gemeinsame Seiten werden jeweils nur einem Würfel zugeschlagen!]
Die Mengen

$$A_{ij} := f^{-1}(B_{ij}) \cap A$$

sind λ-messbar und

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$$

für jedes i. Nach 23.4 (beachte $\lambda(A) < \infty$) ist $\nu := \lambda \lfloor A$ ein Rodon-Maß, der Zusatz zu 23.5 liefert **kompakte** Mengen $K_{ij} \subset A_{ij}$ mit

$$\nu(A_{ij} - K_{ij}) \leq \varepsilon \cdot 2^{-(i+j)}.$$

Es folgt :

$$\begin{aligned}
\lambda\Big(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\Big) &= \nu\Big(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\Big) \\
&= \nu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_{ii} - K_{ii})\Big) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_{ii} - K_{ii}) \\
&\leq \varepsilon \cdot 2^{-i}.
\end{aligned}$$

Aus $\lambda(A) < \infty$ und $\lim\limits_{N\to\infty} \lambda\Big(A - \bigcup\limits_{j=1}^{N} K_{ij}\Big) = \lambda\Big(A - \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_{ij}\Big)$

folgt : $\quad \exists\, N(i) \in \mathbb{N}$ mit

$$(+) \quad \lambda\Big(\underbrace{A - \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{ij}}_{=:D_i}\Big) \leq 2\varepsilon \cdot 2^{-i}.$$

Die Mengen D_i sind kompakt. Für $i,\, j \in \mathbb{N}$ wähle $b_{ij} \in B_{ij}$ beliebig und setze

$$g_i : D_i \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad g_i(x) := b_{ij}, \text{ falls } x \in K_{ij}.$$

Da $K_{ij}, \ldots, K_{iN(i)}$ paarweise disjunkt sind und somit (als kompakte Mengen) Abstand > 0 haben, **ist g_i stetig**. Außerdem :

$$(*) \quad |f(x) - g_i(x)| \leq \frac{1}{i}$$

für alle $x \in D_i$, da $\operatorname{diam} B_{ij} < \frac{1}{i}$. Sei schließlich $K := \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i$, dann gilt :

$$K \subset A \text{ ist kompakt, } g_i \rightrightarrows f \text{ nach } (*) \text{ und daher ist } f|_K \text{ stetig.}$$

Außerdem :

$$\lambda(A - K) = \lambda\Big(A - \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A - D_i) \overset{(+)}{\leq} 2\varepsilon.$$

□

Korollar :

Sei λ ein Borel-reguläres Maß auf $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ sei λ-messbar mit $\lambda(A) < \infty$.
$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ sei λ-messbar. Dann gibt es zu jedem $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ eine stetige Funktion

$$\overline{f} = \overline{f}_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ mit } \lambda\left(\{x \in A : f(x) \neq \overline{f}(x)\}\right) < \varepsilon.$$

Beweis :

Wähle nach dem Satz $K \subset A$ kompakt mit

$$\lambda(A - K) < \varepsilon \text{ und } f|_K : K \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ stetig.}$$

$f|_K$ läßt sich zu einer stetigen Funktion $\overline{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ fortsetzen.
(nicht trivial, benutzt das „Lemma von der Zerlegung der Eins" $\rightarrow$ **Übung!**)

genauer : Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $g : K \to \mathbb{R}^N$ stetig, so gibt es eine stetige Fortsetzung $\overline{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$.

Gemäß $\{x \in A : \, f(x) \neq \overline{f}(x)\} \subset A - K$ folgt die Behauptung.

□

Definition 24.2 :

Sei λ ein Maß auf der Menge X, $A \subset X$. Eine Eigenschaft gilt **λ-fast überall auf A** *(λ-f.ü.), wenn sie bis auf eine λ-Nullmenge $A_\circ \subset A$ richtig ist.*

Beispiele :

1.) $f = \chi_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}$ ist $\mathcal{L}^1$-f.ü. $= 1$, denn $f(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}$ ist $\mathcal{L}^1$-Nullmenge.

2.) Sei λ ein Maß auf X, Y ein topologischer Raum und $f : X \longrightarrow Y$ sei λ-messbar. Ist $g : X \longrightarrow Y$ λ-f.ü. gleich f, also $\lambda(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, so ist g λ-messbar.

Beweis : $\rightarrow$ **Übung!**

Der folgende Satz zeigt : *punktweise Konvergenz liefert glm. Konvergenz abgesehen von „kleinen" Restmengen.*

Satz 24.4 : (von Egoroff)

Sei λ ein Maß auf der Menge X, die $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ seien λ-messbar. $A \subset X$ sei λ-messbar mit $\lambda(A) < \infty$, und es gelte $f_k \longrightarrow g$ λ-f.ü. auf A. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine λ-messbare Menge $B \subset A$ mit

$$\lambda(A - B) < \varepsilon \quad \text{und} \quad f_k \rightrightarrows g \ \text{(gleichmäßig!) auf } B.$$

Beweis :

Sei $C_{i,j} := \bigcup_{k=j}^{\infty} \{x : |f_k(x) - g(x)| > 2^{-i}\}$.

Dann gilt $C_{i,j+1} \subset C_{i,j}$ und somit (wegen $\lambda(A) < \infty$)

$$\lim_{j\to\infty} \lambda(A \cap C_{i,j}) = \lambda\Big(A \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} C_{i,j}\Big)$$

für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Sei $x \in A \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} C_{i,j}$. Dann heißt $x \in A \cap C_{i,j}$:

$$\exists\, k_1 \geq 1 \text{ mit } |f_{k_1}(x) - g(x)| > 2^{-i}.$$

Außerdem gehört x auch zu $A \cap C_{i,k_1+1}$, d.h.

$$\exists\, k_2 \geq k_1 + 1 \text{ mit } |f_{k_2}(x) - g(x)| > 2^{-i}, \text{ usw.}$$

Man gewinnt eine Teilfolge $\{f_{k_\ell}(x)\}$, $k_\ell \overset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, mit der Eigenschaft

$$|f_{k_\ell}(x) - g(x)| > 2^{-i} \quad \forall\, \ell, \text{ d.h. } \quad f_m(x) \not\to g(x) \text{ bei } m \to \infty.$$

Die Menge der Punkte x aus A, bei denen keine Konvergenz gegen $g(x)$ vorliegt, haben nach Vor. λ-Maß 0, also

$$\lim_{j\to\infty} \lambda(A \cap C_{i,j}) = 0 \quad \forall\, i.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ wähle man $N(i)$ mit

$$\lambda(A \cap C_{i,N(i)}) < \varepsilon \cdot 2^{-i}$$

und setze

$$B := A - \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{i,N(i)} \quad \Longrightarrow \quad \lambda(A - B) \le \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A \cap C_{i,N(i)}) < \varepsilon.$$

Es gilt

$$(*) \qquad |f_m(x) - g(x)| \le 2^{-i}$$

für alle $x \in B$ und alle $m \ge N(i)$, also $f_m \rightrightarrows g$ auf B.

Wäre nämlich für ein $x \in B$ und ein $m \ge N(i)$

$$|f_m(x) - g(x)| > 2^{-i},$$

so hätte man $x \in C_{i,N(i)}$, was $B \cap C_{i,N(i)} = \emptyset$ widerspricht.

□

Definition 24.3 : Konvergenz dem Maße nach

Sei λ ein Maß auf X, $f_k, f : X \to \mathbb{R}^n$ seien λ-messbar. Sei $A \subset X$ λ-messbar.
$\{f_k\}$ **konvergiert dem Maße nach auf A gegen f** *, wenn :*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda\left(\{x \in A : |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}\right) = 0 \quad \textit{für alle } \varepsilon > 0.$$

Korollar: (zu Egoroff)

Sei λ ein Maß auf X, $A \subset X$ messbar mit $\lambda(A) < \infty$, und des gelte $f_k \longrightarrow f$ f.ü. auf A für die λ-messbaren Funktionen f_k, f. Dann gilt :

$\boldsymbol{f_k \longrightarrow f}$ **auf A dem Maße nach**.

Hierbei sind f_k, f $\mathbb{R}^n$-wertig.

Beweis :

Sei für gegebenes $\varepsilon > 0$

$$E_k(\varepsilon) := \{x \in A : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Zu zeigen : $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda(E_k(\varepsilon)) = 0.$

Sei $\delta < \varepsilon$. Nach Egoroff gibt es $E \subset A$ messbar mit $\lambda(E) < \delta$ und $f_k \rightrightarrows f$ auf $A - E$.
Es gibt also $k(\delta)$ mit

$$|f_k(x) - f(x)| < \delta$$

für alle $x \in A - E$, $k \geq k(\delta)$. Daraus folgt

$$E_k(\varepsilon) \subset E$$

gemäß $\delta < \varepsilon$.
Also :

$$\lambda(E_k(\varepsilon)) < \delta \quad \forall\, k \geq k(\delta),$$

d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \lambda(E_k(\varepsilon)) = 0.$$

$\square$

Man kann das Korollar teilweise umkehren, d.h. punktweise Konvergenz λ-f.ü. auf A ist nur **etwas** stärker als nur Konvergenz dem Maße nach.

Satz 24.5 : (von Riesz)

Sei λ ein Maß auf X, $A \subset X$ sei λ-messbar. $f_k,\ f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ seien λ-messbar mit $f_k \to f$ dem Maße nach auf A. Dann gibt es eine Teilfolge, die λ-f.ü. auf A gegen f konvergiert.

Bemerkung :

Die Folge selbst muß nicht λ-f.ü. auf A gegen f konvergieren.

Beweis :

vgl. H.Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie.

Definition 24.4 : *(noch eine Aussage über die Struktur messbarer Funktionen)*

Sei X eine Menge. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt eine **einfache Funktion**, *wenn f* **nur endlich viele** *verschiedene Werte annimmt.*
Mit Bild$f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ und $A_k := \{x : f(x) = \alpha_k\}$ gilt :

$$f = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \, \chi_{A_k}.$$

Satz 24.6 :

Sei λ ein Maß auf der Menge X und $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ sei λ-messbar. Dann gibt es eine Folge $\{f_k\}$ von **reellwertigen λ-messbaren Funktionen $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$** *mit folgenden Eigenschaften :*

- *f_k ist* **einfach**
- $|f_k| \le |f_{k+1}|$
- $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ *für alle $x \in X$.*

Ist f beschränkt, so gilt : $f \rightrightarrows f$ auf X.

Ist $f \ge 0$, so gilt : $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots \le f_k \le f$.

Beweisskizze :

Sei $f \ge 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le k \le 2^n \cdot n$ sei

$$\begin{aligned} A_{n,k} &:= \left\{x \in X : \tfrac{k-1}{2^n} \le f(x) < \tfrac{k}{2^n}\right\}, \\ B_n &:= \{x \in X : f(x) \ge n\}. \end{aligned}$$

Die Mengen $A_{n,k}$, B_n sind λ-messbar

$$\Longrightarrow \quad f_n(x) := \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \, \chi_{A_{n,k}}(x) + n \, \chi_{B_n}(x)$$

ist λ-messbare, einfache Funktion ≥ 0.

Es gilt:

(1) $\boldsymbol{f_n(x) \le n \quad \forall x \in X}$,

denn ist $f(x) \ge n$, so folgt $x \notin A_{n,k}$ für $k = 1, \ldots, n2^n$,

so dass $f_n(x) = n \cdot \chi_{B_n}(x) = n$.

Ist hingegen $f(x) < n$, so folgt

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \chi_{A_{n,k}}(x) = \frac{j-1}{2^n},$$

wenn $\frac{j-1}{2^n} \le f(x) < \frac{j}{2^n}$ für ein $j \in \{1, \ldots, n \cdot 2^n\}$.

Offenbar ist aber $\frac{j-1}{2^n} < n$.

Außerdem gilt :

(2) $f_n \leq f_{n+1} < f$ (Monotonie)

und

(3) $|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n} \quad \forall\, x \notin B_n$

<u>zu (2)</u> :

$f_n \leq f$ wurde unter (1) schon erledigt, die Ungleichung $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ rechnet man mit Fallunterscheidung nach.

Ist $x \notin B_n$ also $f(x) < n$, so gilt :

$$f(x) \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}) \quad \text{für genau ein } k \in \{1, \ldots, n \cdot 2^n\}$$

und somit

$$f_n(x) = \frac{k-1}{2^n}.$$

Das bedeutet

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < 2^{-n} \quad \forall\, x \notin B_n.$$

Ist also $f(x) = \infty$, so folgt $f_n(x) = n$ für alle n, mithin $f_n(x) \to f(x)$.

Für $f(x) < \infty$ ist $x \notin B_n$ für $n \geq n_\circ > f(x)$, also gilt nach (3) ebenfalls $f_n(x) \to f(x)$.

Sei f beschränkt, also $f(x) \leq c$. Gemäß (3) gilt wieder

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < 2^{-n} \quad \forall\, n \geq n_\circ > c.$$

Daher :

$$f_n \rightrightarrows f.$$

Hat f beliebiges Vorzeichen, so zerlegt man $f = f^+ - f^-$ und benutzt den ersten Beweisteil für $f^\pm$.

$\square$