25

(Lebesgue -) Integration

ist ein allgemeines Konzept zur Definition von $\int f d\lambda$, wenn λ ein Maß auf X ist und f eine λ-messbare Funktion $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Als „Spezialfälle" bekommen wir

- $\int_a^b f(t)\,dt$ für Regelfunktionen $f:\,[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
- Volumenintegrale $\int\limits_{\Omega} f(x_1,\ldots,x_n)\,d\mathcal{L}^n(x_1,\ldots,x_n)$ über Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sowie Verfahren zur Berechnung.
- unendliche (Zahlen-) Reihen als Integrale bzgl. spezieller Maße.

Definition 25.1 :

(a) *Sei λ ein Maß auf X. Eine Funktion $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt* **λ-Treppenktion**, *falls* **Bild f abzählbar** *und* **f bzgl. des Maßes λ messbar** *ist.*

(b) *Sei $g \geq 0$ λ-Treppenfunktion. Man setzt :*

$$\boxed{\int g\,d\lambda := \sum_{y\in[0,\infty)} y\cdot\lambda(g^{-1}(\{y\}))} \quad \textit{mit der Vereinbarung } \mathbf{0\cdot\infty = 0}.$$

$\int g\,d\lambda \in [0,\infty]$ heißt **λ-Integral von g**, *andere Schreibweisen (mit Angabe der Integrationsvariable) : $\int g(x)\,d\lambda(x)$, $\int g(y)\,d\,\lambda(y)$, etc.*

Bemerkungen :

(1) Da $g^{-1}(\{y\})$ nur für höchstens abzählbar viele $y \geq 0$ nicht-leer ist, macht die Summe Sinn in $[0,\infty]$.

(2) Es sei ausdrücklich betont, dass λ-Treppenfunktionen **nur reelle Werte** annehmen dürfen (Funktionen $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ werden wir später betrachten). Der Grund hierfür ist, dass man Treppenfunktionen addieren will, ohne auf Terme der Form $\infty - \infty$ zu kommen.

(3) Die Konvention „$0\cdot\infty = 0$" läßt sich so erklären :
ist $g \equiv 0$ auf einer Menge mit λ- Maß ∞, so liefert dies anschaulich keinen Beitrag zum Integral.

(4) **Beispiele :**

a) Sei $\{\alpha_n\}$ eine Folge in $[0, \infty)$. Setze

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow [0, \infty), \; g(n) := \alpha_n$$

(das war ja unsere ursprüngliche Def. von Folgen!) und

$$\lambda := \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \quad \delta_n(A) := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A \end{array} \right\}, \quad A \subset \mathbb{N}.$$

Dann ist λ ein Maß auf $\mathbb{N}$ mit (beachte : g Treppenfunktion!)

$$\int g \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y \geq 0} y \cdot \delta_n(\{x : g(x) = y\}) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) = \sum_{n} = 1^{\infty} \alpha_n.$$

Also kann man die Theorie der Reihen mit Gliedern ≥ 0 als Spezialfall wiedererkennen.

b) $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ ist $\mathcal{L}^1$-Treppenfunktion mit $\int f \, d\mathcal{L}^1 = 0$! ($\chi_{\mathbb{Q}}$ ist nicht Riemann integrierbar)

Definition 25.2 : Integral von Treppenfunktion mit beliebigem Vorzeichen

Sei $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine λ-Treppenfunktion mit

$$(*) \qquad \int g^+ \, d\lambda < \infty \;\; \textbf{oder} \;\; \int g^- \, d\lambda < \infty,$$

wobei $g^+ := \max\{0, g\}$, $g^- := -\min\{0, g\}$, also $g = g^+ - g^-$.

$$\boxed{\textbf{Das } \boldsymbol{\lambda}\textbf{-Integral von } \boldsymbol{g} \textbf{ ist } \int \boldsymbol{g \, d\lambda := \int g^+ \, d\lambda - \int g^- \, d\lambda.}}$$

Im Fall $(*)$ nennen wir $\boldsymbol{g}$ $\boldsymbol{\lambda}$**-integrierbar**.

Bemerkungen :

(1) Aus $(*)$ folgt, dass „$\infty - \infty$" nicht eintritt.

(2) g λ-integrierbar $\Longrightarrow$ $\int g \, d\lambda = \sum_{y \in \mathbb{R}} y \cdot \lambda(g^{-1}(\{y\}) \in \overline{\mathbb{R}}$.

(3) g λ-Treppenfunktion $\Longrightarrow$ g^+, g^- λ-Treppenfunktionen.

Der folgende Satz ist $\rightarrow$ **Übung!**

Satz 25.1 :

Seien $f,\ g\ :\ X \longrightarrow \mathbb{R}$ λ-Treppenfunktionen und $r \in \mathbb{R}$. Dann ist $r \cdot f + g$ λ-Treppenfunktion. **Sind $\boldsymbol{f, g}$ $\boldsymbol{\lambda}$-integrierbar, so auch $\boldsymbol{r \cdot f + g}$** *mit*

$$\boxed{\int (r \cdot f + g)\, d\lambda = r \cdot \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda} \ ,$$

! vorausgesetzt die rechte Seite ist kein unbestimmter Ausdruck !

Insbesondere folgt λ-Integrierbarkeit von $r \cdot f + g$ **im Fall** $\int f\, d\lambda,\ \int g\, d\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Wir definieren jetzt das λ-Integral allgemeiner Funktionen durch Approximation mit Treppenfunktionen.

Definition 25.3 : **$\boldsymbol{\lambda}$-Integral** *(von messbaren Funktionen)*

Sei λ ein Maß auf der Menge X und $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ λ-messbar.

(i) Das **$\boldsymbol{\lambda}$-Oberintegral von $\boldsymbol{f}$** *ist definiert durch*

$$\overset{*}{\int} f\, d\lambda := \inf \Big\{ \int g\, d\lambda : \begin{array}{l} g \text{ ist } \lambda\text{-integrierbare Treppenfunktion} : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{mit } g \geq f \ \lambda\text{-f.ü.} \end{array} \Big\}.$$

Ist $f = \infty$ auf einer Menge mit positivem Maß, so gibt es **keine** *λ-Treppenfunktion g mit $g \geq f$ f.ü.*

Dann sei $\overset{*}{\int} f\, d\lambda := +\infty$ $(\inf\{\ldots\} = \emptyset)$

(ii) Das **$\boldsymbol{\lambda}$-Unterintegral von $\boldsymbol{f}$** *ist erklärt durch*

$$\underset{*}{\int} f\, d\lambda := \sup \Big\{ \int h\, d\lambda : \begin{array}{l} h \text{ ist } \lambda\text{-integrierbare Treppenfunktion} : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{mit } h \leq f \ \lambda\text{-f.ü.} \end{array} \Big\}.$$

Man setzt : $\underset{*}{\int} f\, d\lambda := -\infty$ *, falls* $\sup\{\ldots\} = \emptyset$.

(iii) f heißt **$\boldsymbol{\lambda}$-integrierbar** $:\Longleftrightarrow$ $\underset{*}{\int} f\, d\lambda = \overset{*}{\int} f\, d\lambda$ *in* $\overline{\mathbb{R}}$.

Den gemeinsamen Wert von Ober- und Unterintegral bezeichnet man dann mit

$$\int \boldsymbol{f\, d\lambda}.$$

Achtung :

$\int f\, d\lambda$ *ist* **nicht notwendig** *eine reelle Zahl, es ist durchaus* $\int f\, d\lambda = \pm\infty$ *möglich. Manche Bücher benutzen integrierbar nur im Fall* $\int f\, d\lambda \in \mathbb{R}$.

(iv) Ist f λ-integrierbar und $\int f\, d\lambda \in \mathbb{R}$, so nennen wir f **$\boldsymbol{\lambda}$-summierbar**.

Satz 25.2 : Eigenschaften von $\int\limits_*$ und $\int\limits^*$

Sei λ ein Maß auf X, f, $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ seien λ-messbar.
(für Treppenfunktionen sind $\int\limits_*$ und $\int\limits^*$ gleich dem Integrtal aus Def.25.1)

(0) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ λ-integrierbare Treppenfunktion $\Longrightarrow \int\limits_* f\,d\lambda = \int\limits^* f\,d\lambda$

(für Treppenfunktionen sind $\int\limits_*$ und $\int\limits^*$ gleich dem Integral aus Def.25.1)

(1) $f \leq g$ λ-f.ü. $\Longrightarrow \int\limits^* f\,d\lambda \leq \int\limits^* g\,d\lambda$ (analog für $\int\limits_*$)

$\Rightarrow$ *(2) $f \geq 0$ λ-f.ü. $\Longrightarrow \int\limits^* f\,d\lambda \geq 0$, $\int\limits_* f\,d\lambda \geq 0$*

(3) $\int\limits^* f\,d\lambda < \infty \Longrightarrow \int\limits^* f^+\,d\lambda < \infty$ und $f(x) < \infty$ für λ-f.a. $x \in X$

(4) für $0 < c < \infty$ ist $\int\limits^* (c \cdot f)\,d\lambda = c \int\limits^* f\,d\lambda$

(Übung!) $\rightarrow$ *(5) $\int\limits^* f\,d\lambda + \int\limits^* g\,d\lambda < \infty \overset{\text{definiert}}{\Longrightarrow} \int\limits^* (f+g)\,d\lambda \leq \int\limits^* f\,d\lambda + \int\limits^* g\,d\lambda$*

(6) $\int\limits_* f\,d\lambda = -\int\limits^* (-f)\,d\lambda$ (dadurch braucht man vieles nur für $\int\limits^*$ zu beweisen)

(7) $\int\limits_* f\,d\lambda \leq \int\limits^* f\,d\lambda$.

Beweis :

(6)
$$\begin{aligned}
\int\limits_* f\,d\lambda &= \sup\{\textstyle\int h\,d\lambda : \ldots h \leq f \ \ \lambda\text{-f.ü.}\} \\
&= \sup\{-\textstyle\int (-h)\,d\lambda : \ldots -h \geq -f \ldots\} \\
&= -\inf\{\textstyle\int (-h)\,d\lambda : \ldots -h \geq -f \ldots\} \\
&= -\inf\{\textstyle\int g\,d\lambda : g \text{ ist } \lambda\text{-integrierbare T.F. mit } -f \leq g \text{ f.ü.}\} \\
&= -\int\limits^* (-f)\,d\lambda.
\end{aligned}$$

(0) Sei h eine λ-T.F. mit $h \geq f$ λ-f.ü. Angenommen $\int h\,d\lambda < \int f\,d\lambda$ (Integral nach Def. 25.2). Dann ist $f - h$ λ-integrierbare T.F. mit

$$\int (f-h)\,d\lambda \overset{\text{S.25.1}}{=} \int f\,d\lambda - \int h\,d\lambda > 0.$$

Gemäß $f - h \leq 0$ λ-f.ü., ist aber trivialerweise

$$\int (f-h)\,d\lambda \overset{\text{Def.25.2}}{=} \underbrace{\int (f-h)^+\,d\lambda}_{=0} - \underbrace{\int (f-h)^-\,d\lambda}_{=0} \leq 0,$$

also folgt

$$\begin{aligned} \int h\,d\lambda &\geq \int f\,d\lambda, \text{ d.h. (nach Übergang zu inf bzgl. } h) \\ \int^* f\,d\lambda &\geq \int f\,d\lambda. \end{aligned}$$

Dass $\int^* f\,d\lambda \geq \int f\,d\lambda$ ist, folgt aber trivialerweise, da ja f selbst λ- T.F.

Analog für $\int_* f\,d\lambda$.

(1) $\{h : h\ \ \lambda\text{-Treppenfunktion} \geq g\ \ \lambda\text{-f.ü. }\} \subset \{h : h\ \ \lambda\text{-T.F.} \geq f\ \ \lambda\text{-f.ü.}\}$

$\Longrightarrow\ \inf\{\int h\,d\lambda : \ldots h \geq g \ldots\} \geq \inf\{\int h\,d\lambda : \ldots h \geq f \ldots\}.$

$\Longrightarrow\ \int^* g\,d\lambda \geq \int^* f\,d\lambda$ (entsprechend für $\int_*$)

der 1te Teil von (2) folgt aus (1) wegen $\int^* 0\,d\lambda = 0$, wenn man in (1) g=0 wählt.

für das Unterintegral : z.z. : $f \geq 0 \implies \int_* f \geq 0$

Sei h λ-integrierbare T.F. mit $h \leq f$ f. ü., d.h. speziell : $\int h^+ d\lambda - \int h^- d\lambda$ ist definiert.

Wegen $f \geq 0$ ist h^+ dann λ-integrierbare T.F. mit $h^+ \leq f$.

Aus $\int h^+ d\lambda \geq 0$ (Def. 25.1) folgt :

$$\sup\{\int \rho\,d\lambda : \rho\ \lambda\text{-integrierbare T.F. } \leq f\ \lambda\text{-f.ü.}\} \geq 0, \text{ also } \int_* f\,d\lambda \geq 0.$$

(3) Sei $\int^* f\,d\lambda < \infty \quad \Longrightarrow \quad \exists\ \lambda$-integrierbare T.F. $g \geq f$ λ-f.ü. mit

$$\int g\,d\lambda < \infty, \text{ speziell } \int g^+\,d\lambda < \infty.$$

g ist λ-T.F. $\Longrightarrow g^+$ ist λ-T.F. $\Longrightarrow g^+$ ist reellwertig, also $g(x) < \infty$.

$f(x) \leq g^+(x)$ λ-f.ü. liefert dann

$$\lambda\left(\{x : f(x) = \infty\}\right) = 0.$$

Da $g^+ \geq f^+$ gilt (und g^+ λ-integrierbere T.F. ist), folgt :

$$\int^* f^+\,d\lambda \leq \int g^+ d\lambda < \infty.$$

Rest des Satzes $\to$ **Übung**

(4)
$$\begin{aligned} \int_* (cf) d\lambda &= \inf\{\textstyle\int h\,d\lambda : \ldots h \geq cf \ldots \lambda\text{-f.ü.}\} \\ &= \inf\{c \cdot \textstyle\int \frac{h}{c}\,d\lambda : \ldots \frac{h}{c} \geq f \ldots \lambda\text{-f.ü.}\} \\ &= \inf\{c \cdot \textstyle\int g\,d\lambda : \ldots g \geq f \ldots \lambda\text{- f.ü.}\} \\ &= c \cdot \int^* f\,d\lambda. \end{aligned}$$

(5) $\rightarrow$ **Übung!** **(Hinweis: indirekt, benutze (3))**

(7) Seien h T.F. $\leq f$ und g T.F. $\geq f$.

$\overset{(0),(1)}{\Longrightarrow}$ $\int h\,d\lambda \leq \int g\,d\lambda$

nun bilde sup (inf) bzgl. h (g).

$\square$

Satz 25.3 : **Kriterien für Integrierbarkeit**

Sei λ ein Maß auf X, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sei **$\boldsymbol{\lambda}$-messbar.**

(1) $f \geq 0$ *λ-f.ü.* $\Longrightarrow$ f **ist integrierbar** *mit* $\int f\,d\lambda \in [0,\infty]$

(2) f *integrierbar* $\Longrightarrow$ $c \cdot f$ *integrierbar für jedes* $c \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\int (c\cdot f) d\lambda = c \int f\,d\lambda \quad \textit{(Konvention : } 0\cdot(\pm\infty) = 0)$$

(3) Sind f und g λ-integrierbar und ist $\int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda$ **kein** *undefinierter Ausdruck, so folgt λ-Integrierbarkeit von $f+g$ mit*

$$\int (f+g)\,d\lambda = \int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda.$$

Speziell : $\boxed{f,\ g \text{ summierbar} \quad \Longrightarrow \quad f+g \text{ summierbar}}$ **!**

(4) Sind f, g λ-integrierbar mit $f \leq g$ λ-f.ü., so ist

$$\int f\,d\lambda \leq \int g\,d\lambda. \quad \textit{(Monotonie)}$$

(5) f *λ-integrierbar* $\Longleftrightarrow$ f^+ **oder** f^- *λ-summierbar.*

Dann : $$\int f\,d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda.$$

(6) f *λ-integrierbar* $\Longrightarrow$ *es gilt die Abschätzung*

$$|\int f\,d\lambda| \leq \int |f|\,d\lambda.$$

(7) f *λ-summierbar* $\Longleftrightarrow$ $|f|$ *λ-summierbar.*

(8) $f = g$ *λ-f.ü.,* f *integrierbar* $\Longleftrightarrow$ g *integrierbar, und die Integrale sind „=".*

Beweis :

(1) **Fall 1 :**

Sei $\lambda\left(f^{-1}\{\infty\}\right) > 0$. Setze $h := n \cdot \chi_{f^{-1}\{\infty\}}$.

h ist λ-T.F. mit $h \leq f$

$$\Longrightarrow n \cdot \lambda(f^{-1}\{\infty\}) \leq \int_* tf \, d\lambda, \text{ also } \int_* f \, d\lambda = \infty \text{ für } n \to \infty.$$

Aus 25.2 (7) folgt $\int^* f \, d\lambda = \infty$, so dass $\int f \, d\lambda = \infty$.

Fall 2 :

Sei $\lambda\left(f^{-1}\{\infty\}\right) = 0$. Für $t > 1$ zerlegen wir disjunkt

$$\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\{x : t^n \leq f(x) < t^{n+1}\}}_{=: A_n}$$

und setzen $g : X \longrightarrow [0, \infty)$

$$g(x) := \begin{cases} t^n & , \quad x \in A_n \text{ für ein } n \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Da f λ-f.ü. endlich ist, ist $t \cdot g$ eine λ-Treppenfunktion $\geq f$ λ-f.ü., d.h. :

$$\int^* f \, d\lambda \leq \int t \cdot g \, d\lambda \overset{\text{Satz 25.1}}{=} t \cdot \int g \, d\lambda \leq t \cdot \int_* f \, d\lambda, \text{ denn } g \text{ ist } \lambda\text{-T.F.} \leq f.$$

Im Fall $\int_* f \, d\lambda = \infty$ sind wir fertig (Satz 25.2 (7)).

Ist $\int_* f \, d\lambda < \infty$, so geht man zur Grenze $t \downarrow 1$

$\Longrightarrow \quad \int^* f \, d\lambda \leq \int_* f \, d\lambda$, also folgt die Behauptung.

(2) folgt aus Satz 25.2 (4) (Homogenität des Oberintegrals für Faktoren > 0 bzw. der entsprechenden Relation für $\int_*$, die man aus Satz 25.2 (6) bekommt).

(3) Seien f, g λ-summierbar, also $\int f \, d\lambda$, $\int g \, d\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} \text{Satz 25.2 (5)} \Longrightarrow & \int^* f \, d\lambda + \int^* g \, d\lambda \geq \int^* (f+g) \, d\lambda \\ \text{Also :} & \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda \geq \int_* (f+g) \, d\lambda \end{array}$$

(da $\int^* = \int$ für f, g und $\int^* (f+g) \, d\lambda \geq \int_* (f+g) \, d\lambda$)

$$\begin{aligned} \text{Satz 25.2 (6)} \Longrightarrow \int_* (f+g) \, d\lambda \quad &= \quad -\int^* -(f+g) \, d\lambda \\ &\overset{25.1\,(5)}{\geq} \quad -\left(\int^* (-f) \, d\lambda + \int^* (-g) \, d\lambda\right) \\ &\overset{(*)}{=} \quad \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda, \end{aligned}$$

denn mit f, g sind auch $-f$, $-g$ λ-summierbar, so dass $(*)$ gilt. Zusammen folgt

$$\int (f+g)\,d\lambda = \int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda.$$

Die Fälle $\int f\,d\lambda$, $\int g\,d\lambda \in \{\pm\infty\}$ diskutiert man analog. (Rest $\to$ Übung !)

(4) Sei $\int g\,d\lambda < \infty$

$$\begin{aligned}
&\overset{25.2\,(3)}{\Longrightarrow} \quad g(x) < \infty \text{ f.ü., also } f(x) \le g(x) < \infty \ \lambda\text{-f.ü.}\\
&\Longrightarrow \quad g-f \text{ ist definiert und } \ge 0 \ \lambda\text{-f.ü.}\\
&\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad g-f \text{ ist } \lambda\text{-integrierbar mit } \textstyle\int (g-f)\,d\lambda \ge 0\\
&\overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad f-g \text{ ist } \lambda\text{-integrierbar mit } \textstyle\int (f-g)\,d\lambda \le 0.
\end{aligned}$$

$\int g\,d\lambda + \int (f-g)\,d\lambda$ ist **kein** unbestimmter Ausdruck, daher gilt nach (3) :

$$\int g\,d\lambda + \underbrace{\int (f-g)\,d\lambda}_{\le 0} = \int f\,d\lambda \quad \Longrightarrow \quad \int g\,d\lambda \ge \int f\,d\lambda.$$

Im Fall $\int g\,d\lambda = \infty$ ist nichts zu zeigen.

(5) <u>„$\Longrightarrow$"</u> :

Sei f λ-integrierbar, also $\int_* f\,d\lambda = \int^* f\,d\lambda$.

<u>Fall 1</u> : $\int f\,d\lambda = \int^* f\,d\lambda < \infty$

Satz 25.2 (3) $\Longrightarrow \int^* f^+ d\lambda < \infty$

Satz 25.3 (1) $\Longrightarrow \int f^+ d\lambda = \int^* f^+ d\lambda$

Also ist f^+ λ-summierbar.

<u>Fall 2</u> : $\int f\,d\lambda > -\infty$

analog : f^- ist λ-summierbar.

Da einer der beiden Fälle offensichtlich eintreten muß, folgt „$\Longrightarrow$".

<u>„$\Longleftarrow$"</u> :

Sei f^+ oder f^- λ-summierbar

$\Longrightarrow \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda$ ist kein ungestimmter Ausdruck

$\overset{(3)}{\Longrightarrow} f = f^+ - f^-$ ist λ-integrierbar mit

$$\int f\,d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda$$

(6) $|f|$, f^+, f^- sind nach (1) λ-integrierbar, aus (3) folgt

$$\int |f|\, d\lambda = \int (f^+ + f^-)\, d\lambda = \int f^+ d\lambda + \int f^-\, d\lambda$$

Ist $\int |f| d\lambda < \infty$, so auch $\int f^+ d\lambda$, $\int f^- d\lambda$.
Aus $f \leq |f|$, $-|f| \leq f$ folgt mit (4)

$$-\int |f| d\lambda \leq \int f d\lambda \leq \int |f| d\lambda,$$

also die Abschätzung (6). Für $\int |f|\, d\lambda = \infty$ gilt sie trivialerweise.
Ist schließlich f summierbar, so folgt aus dem Beweis von (5), dass dann $f^\pm$ summierbar sein müssen. Die Gleichung aus (6)

$$\int |f| d\lambda = \int f^+ d\lambda + \int f^- d\lambda$$

liefert Summierbarkeit von $|f|$.

$\square$

Satz 25.4 :

1) *Sei λ ein Maß auf X. Für λ-messbare Mengen $A \subset X$ gilt :*

$\lambda(A) = \int \chi_A\, d\lambda.$

2) *Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$. Dann gilt :*

   (i) *Regelfunktionen $f \in \mathcal{R}([a, b])$ sind $\mathcal{L}^1$-messbar*

   (ii) *$\chi_{[a,b]} \cdot f$ ist $\mathcal{L}^1$-integrierbar mit*

$$\boxed{\int \chi_{[a,b]} f d\,\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x) dx.}$$

Bemerkung zu 2) :

Rechts in (ii) steht das bekannte Integral von Regelfunktionen. Die Aussage von (ii) ist daher, dass das Integral von Regelfunktionen nichts anderes ist als das Integral bzgl. des eindim. Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$. Ist also f genügend gut, so können wir umgekehrt zur Bestimmung von $\int \chi_{[a,b]}\, f\, d\mathcal{L}^1$ alle Regeln für $\int_a^b f(x)\, dx$ benutzen.

Es gibt durchaus Funktionen, die nicht zur Klasse der Regelfunktionen gehören, die aber bzgl. $\mathcal{L}^1$ integrierbar sind.

Beispiel :

Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Dann :

$$\int_\circ^1 f(x)\ dx \quad \textbf{nicht definiert},$$

aber

$$\int^* \chi_{[0,1]} f\, d\mathcal{L}^1 = 0 = \int_* \chi_{[0,1]} f\, d\mathcal{L}^1,$$

da $f = 0\quad \mathcal{L}^1$-f.ü. auf $[0,1]$.

□

Notation :

$A \subset X$ λ-messbar, $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\underbrace{\lambda\text{-messbar}}_{\text{bzgl. } \lambda \lfloor A}$. ($\Longleftrightarrow \chi_A f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ λ-messbar)

Dann :

$$\boxed{\int_A f\, d\lambda := \int \chi_A f\, d\lambda} \quad \text{(sofern das Integral rechts existiert).}$$

Beweis von 25.4 :

1) $\rightarrow$ **Übung!**

2) Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Approximationssatz aus §12

$\Longrightarrow$ $\exists\, f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$,
wobei f_n **Treppenfunktion** bzgl. einer **endlichen** Zerlegung von $[a,b]$ ist.

$\Longrightarrow$ f_n ist $\mathcal{L}^1$-Treppenfunktion.

Somit ist f insbesondere punktweise Limes der $\mathcal{L}^1$-messbaren f_n, **also $\mathcal{L}^1$-messbar**.

Nun benutze 12.7 : zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx - \sum_{k=1}^n f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon \quad (*)$$

für jede Zerlegung $a = x_\circ < \ldots < x_n = b$ der Feinheit $< \delta$ und beliebiger Wahl von Stützstellen $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Wähle z_k so, dass $f(z_k) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ und setze

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(z_k) & , \quad x \in (x_{k-1}, x_k) \\ \text{beliebig} & , \quad x \in \{x_\circ, \dots, x_n\} \\ 0 & , \quad sonst \end{cases}$$

$\Longrightarrow \quad \varphi \geq f \;\; \mathcal{L}^1$-f.ü. auf $[a,b]$; $\varphi \;\; \mathcal{L}^1$-Treppenfunktion

$$\Longrightarrow \quad (1) \qquad \overset{*}{\int} \chi_{[a,b]}\, f\, d\mathcal{L}^1 \leq \int \varphi\, d\mathcal{L}^1 = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1})$$

Dann wähle $\tilde{z}_k$ mit $f(\tilde{z}_k) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ und bilde $\tilde{\varphi}(x)$ wie oben.

$$\Longrightarrow \quad (2) \qquad \underset{*}{\int} \chi_{[a,b]}\, f d\mathcal{L}^1 \;\geq\; \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)(x_k - x_{k-1})$$

Nun Gilt :

$$\begin{aligned} 0 \leq \overset{*}{\int} - \underset{*}{\int} \quad &\leq \quad \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \quad - \quad \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \quad \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(t)\; dt \quad + \quad \int_a^b f(t)\; dt - \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\overset{(*)}{\leq} \quad 2\varepsilon \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \underset{*}{\int} = \overset{*}{\int} = \int \chi_{[a,b]}\, f d\mathcal{L}^1$$

$$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \quad \int_a^b f(t)\; dt - \varepsilon \leq \int \chi_{[a,b]}\, f d\mathcal{L}^1 \leq \int_a^b f(t)\; dt + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \int \chi_{[a,b]}\, f d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(t)\; dt$$

□

Wir diskutieren jetzt **Konvergenzsätze für Folgen** vom Typ $\int f_n\, d\lambda$, bei denen $f_n \longrightarrow f$ in einem gewissen Sinn gilt.

Satz 25.5 : Lemma von Fatou

Sei λ ein Maß auf X und $f_k : X \longrightarrow [0, \infty]$ eine Folge nicht-negativer λ-messbarer Funktionen. Dann gilt :

$$\boxed{\int \left(\liminf_{k\to\infty} f_k \right) d\lambda \;\leq\; \liminf_{k\to\infty} \int f_k d\lambda.}$$

Verallgemeinerung : (ohne Vorzeichen)

$f_k \geq g$ λ-f.ü. mit g λ-summierbar

Beweis :

$f := \liminf_{k\to\infty} f_k$ ist λ-messbare Funktion ≥ 0, d.h. alle auftretenden Integrale sind definiert in $[0,\infty]$. Sei g eine λ-Treppenfunktion mit $0 \leq g \leq f$ λ-f.ü., also

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \, \chi_{A_j}, \quad a_j > 0, \quad A_j \text{ } \lambda\text{-messbar, paarweise disjunkt.}$$

Man setzt für $0 < t < 1$, $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$

$$B_{j,k} := A_j \cap \{x : f_\ell(x) > t a_j \ \ \forall\, \ell \geq k\}.$$

Es gilt :

$$(1) \quad A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{j,\,k},$$

denn für $x \in A_j$ ist offenbar $f(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x) \geq g(x) = a_j > t a_j$.
Gäbe es kein $k \geq 1$ mit $x \in B_{j,k}$, so könnte man zu jedem k ein $\ell \geq k$ finden mit $f_\ell(x) \leq t a_j$, d.h. $\liminf_{\ell\to\infty} f_\ell(x) \leq t a_j$. Deshalb gilt (1).
Offenbar gilt auch :

$$(2) \quad B_{j,\,k} \subset B_{j,\,k+1} \quad (\subset A_j).$$

Gemäß $\quad f_k \geq \sum_{j=1}^{N} f_k \, \chi_{a_j} \quad \forall\ N$ folgt (bei festem N)

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{A_j} f_k \, d\lambda \;\; = \;\; \sum_{j=1}^{N} \int \chi_{A_j} f_k \, d\lambda \;\; \leq \;\; \int f_k \, d\lambda$$

$$\Longrightarrow \quad \int f_k \, d\lambda \;\; \overset{B_{j,k}\subset A_j}{\geq} \;\; \sum_{j=1}^{N} \int_{B_{j,k}} f_k \, d\lambda \;\; \overset{\text{Def.}B_{j,k}}{\geq} \;\; t \cdot \sum_{j=1}^{N} a_j \, \lambda(B_{j,k})$$

$$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \quad \liminf_{k\to\infty} \int f_k \, d\lambda \;\; \geq \;\; t \cdot \sum_{j=1}^{N} a_j \, \lambda(A_j) \quad ,$$

denn $\lambda(B_{j,k}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda(A_j)$. Diese Abschätzung gilt für alle $N \in \mathbb{N}$, $N \to \infty$ ergibt :

$$\liminf_{k\to\infty} \int f_k \, d\lambda \;\; \geq \;\; t \cdot \int g \, d\lambda.$$

Mit $t \nearrow 1$ ergibt sich

$$\int g \, d\lambda \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k \, d\lambda$$

für jede λ-Treppenfunktion $0 \leq g \leq f$. Also

$$\int_* f \, d\lambda \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k \, d\lambda,$$

d.h. wir haben die Behauptung gemäß $\quad \int_* f \, d\lambda \;=\; \int^* f d\lambda$, vgl. Satz 25.3 (1).

$\square$

Satz 25.6 : (monotone Konvergenz)

Sei $\{f_k\}$, $f_k : X \longrightarrow [0,\infty]$, *eine* **monoton wachsende** *Folge nicht-negativer* λ*-messbarer Funktionen. Dann gilt :*

$$\boxed{\int \lim_{k\to\infty} f_k \, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\lambda}$$

Bemerkungen :

1) $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ ist wegen der Monotonie punktweise erklärt, ≥ 0 und messbar $\Longrightarrow \int f \, d\lambda$ existiert in $[0,\infty]$.

2) entsprechend : $f_k \geq g$ mit g λ-summierbar.

Beweis :

Für $j \in \mathbb{N}$ ist $f_j \leq f$

$$\Longrightarrow \int f_j \, d\lambda \leq \int f \, d\lambda$$

$$\Longrightarrow \limsup_{j\to\infty} \int f_j \, d\lambda \leq \int f \, d\lambda \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \int f_j \, d\lambda,$$

also existiert $\lim_{j\to\infty} \int f_j \, d\lambda$ mit Wert $\int f \, d\lambda$.

$\square$

Korollar: (durch Anwenden auf Partialsummen)

Sei $f_k : X \longrightarrow [0,\infty]$ λ-messbar. Dann gilt :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, d\lambda = \int \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big)}_{\substack{\text{p.w.Limes} \\ \text{in } [0,\infty]}} \, d\lambda,$$

speziell ist $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ λ-summierbar, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} (\int f_k \, d\lambda) < \infty$.

Satz 25.7 : (Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz)

Sei $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ λ*-summierbar, also* $\int |g| \, d\lambda < \infty$ *(Satz 25.3 (7)).*
f_k*,* f *seien* λ*-messbare Funktionen* $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *mit* $|f_k| \leq |g|$ *und* $f_k \longrightarrow f$ λ*-f.ü.*
Dann gilt :

$$\lim_{k\to\infty} \int |f_k - f| \, d\lambda = 0 \qquad \left(\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\lambda = \int f \, d\lambda \right)$$

speziell ist

$\boldsymbol{f}$ **$\boldsymbol{\lambda}$-summierbar**.

Bemerkung:

Man nennt g aus offensichtlichen Gründen eine **summierbare Majorante**.

Beweis :

$|f_k| \leq |g|$

$$\overset{\text{Satz 25.3 (4)}}{\Longrightarrow} \int |f_k| \, d\lambda \leq \int |g| \, d\lambda < \infty \quad \text{und (Fatou)} \quad \int |f| \, d\lambda \leq \liminf_{k\to\infty} \int |f_k| \, d\lambda \leq \int |g| \, d\lambda$$

Alle auftretenden Funktionen sind λ-summierbar.
Sei $\varphi_k := 2 \cdot |g| - |f_k - f| \geq 0$ λ-f.ü.

$$\overset{\text{Fatou}}{\Longrightarrow} \liminf_{k\to\infty} \int \varphi_k \, d\lambda \geq \int \liminf_{k\to\infty} \varphi_k \, d\lambda = \int 2\,|g| \, d\lambda.$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad 0 \quad &\leq \quad \liminf_{k\to\infty} \int (\varphi_k - 2\,|g|) \, d\lambda \\ &= \quad \liminf_{k\to\infty} \int (-|f_k - f|) \, d\lambda \\ &= \quad -\limsup_{k\to\infty} \int |f_k - f| \, d\lambda \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \limsup_{k\to\infty} \int |f_k - f| \, d\lambda \quad \leq \quad 0,$$

d.h.

$$\int |f_k - f| \, d\lambda \longrightarrow 0.$$

Die 2^{te} Behauptung folgt aus

$$\left| \int f_k \, d\lambda - \int f \, d\lambda \right| = \left| \int (f_k - f) \, d\lambda \right| \overset{\text{S.25.3 (6)}}{\leq} \int |f_k - f| \, d\lambda$$

$\square$

Als $\to$ Übung überlege man sich folgende

Variante der dom. Konvergenz:

$g,\ g_k : X \longrightarrow [0,\infty]$ seien λ-summierbar; $f_k,\ f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ seien λ-messbar, und es gelte :

$$|f_k| \le g_k,\ f_k \to f,\ g_k \to g \text{ f.ü. und } \int g_k\, d\lambda \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \int g\, d\lambda.$$

Dann gilt :

$$\int |f_k - f|\, d\lambda \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zum Abschluß fragen wir :

Welche Konvergenz $f_k \to f$ folgt aus $\int |f_k - f|\, d\lambda \to 0$?

Satz 25.8 :

Seien f_k, f λ-summierbar mit $\lim\limits_{k\to\infty} \int |f_k - f|\, d\lambda = 0$. Dann gilt $f_k \to f$ dem Maße nach, eine **Teilfolge** *$\{f_{n_\ell}\}$ konvergiert daher punktweise λ-f.ü. gegen f.*

[Die Folge selbst muß nicht f.ü. punktweise konvergent sein!]

Beweis :

Die letzte Aussage folgt aus der ersten mit dem Satz v. Riesz.

Setze $E_k(\delta) := \{x : |f_k(x) - f(x)| \ge \delta\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$.

Zu gegebenem $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ wähle $k_\circ$ mit $\int |f_k - f|\, d\lambda < \delta \cdot \varepsilon$ für alle $k \ge k_\circ$.

Für $k \ge k_\circ$ folgt

$$\lambda(E_k(\delta)) = \frac{1}{\delta}(\delta\, \lambda(E_k(\delta))) \le \frac{1}{\delta} \int_{E_k(\delta)} |f_k - f|\, d\lambda \le \frac{1}{\delta} \int |f_k - f|\, d\lambda \le \varepsilon,$$

d.h.

$$\forall\, k \ge k_\circ : \quad \lambda(E_k(\delta)) \le \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k(\delta)) = 0.$$

Produkt-Maße / Satz Von Fubini

Motivation :

Volumen eines Körpers A in $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}^n(A) = \int \chi_A \, d\mathcal{L}^n$.
Berechnen können wir aber nur $\int_a^b f(x)\,dx$. D.h.: Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\int f(x_a,\dots,x_n)\,d\mathcal{L}^n(x)$ und den iterierten Mehrfachintegralen $\int(\dots(\int f(x_1\dots x_n)\,dx_1)\dots)\,dx_n$, wo sukzessive ausintegriert wird?

Definition 25.4 : Produktmaß

Seien λ und ρ Maße auf X bzw. Y. Das Produktmaß $\lambda \times \rho$ ist ein Maß auf $X \times Y$, das durch

$$\boxed{\begin{array}{l}(\lambda \times \rho)(C) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)\,\rho(B_i) : C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i, \\ \textit{mit beliebigen Mengen } A_i \subset X,\ B_i \subset Y\},\ C \subset X \times Y\end{array}}$$

festgelegt wird. Dabei vereinbart man für die Summanden $0 \cdot \infty = 0$,

wenn $\lambda(A_i) = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$ *und* $\rho(B_i) = \begin{cases} 0 \\ \infty. \end{cases}$

Satz 25.9 :

$\lambda \times \rho$ ist ein Maß auf $X \times Y$.

Beweis : $\rightarrow$ Übung ! (vgl. die Überlegung für $\mathcal{L}^n$)

Aus der Definition folgt sofort

$$\boxed{(\lambda \times \rho)(A \times B) \ \leq\ \lambda(A)\rho(B)} \qquad (*)$$

für alle $A \subset X$, $B \subset Y$, und man kann zeigen :

$\boldsymbol{\lambda \times \rho}$ ist das Supremum aller Maße $\boldsymbol{\mu}$ auf $\boldsymbol{X \times Y}$ mit $(*)$.

In $(*)$ gilt i.a. „<“, wir geben gleich Bedingungen für λ, ρ, A, B, wann „=“ eintritt.

Satz 25.10 :

Für das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gilt

$$\boxed{\mathcal{L}^{n+m} \ =\ \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m}\ .$$

Korollar :

$$\boxed{\text{Auf } \mathbb{R}^n \text{ ist } \mathcal{L}^n = \underbrace{\mathcal{L}^1 \times \ldots \times \mathcal{L}^1}_{n-\text{mal}}\ .}$$

Bemerkung:

Das n-fache Produkt $\lambda_1 \times \ldots \times \lambda_n$ von Maßen λ_i auf X_i wird induktiv erklärt. Man überlegt sich leicht, dass diese Bildung **assoziativ** ist, d.h. man braucht keine Klammern setzen!

Beweis von Satz 25.10 :

Es ist zunächst

$$(1) \quad \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m \leq \mathcal{L}^{n+m},$$

denn : $\quad \forall\ C \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{n+m}(C) \quad &:= \quad \inf\big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n+m}(Q_i) : Q_i = Q_i^{(n)} \times Q_i^{(m)} \subset \mathbb{R}^{n+m} \text{ mit } \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \supset C \big\} \\
&= \quad \inf\big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i^{(n)}) \cdot \mathcal{L}^m(Q_i^{(m)} : \ldots \big\} \\
&\geq \quad \inf\big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_i) \cdot \mathcal{L}^m(B_i) : A_i \subset \mathbb{R}^n,\ B_i \subset \mathbb{R}^m \text{ mit } \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i) \supset C \big\}
\end{aligned}$$

(da rechts von "$\geq$" das inf über eine größere Menge von Zahlen gebildet wird).

Man beachte weiter die Gültigkeit von

$$(2) \quad \mathcal{L}^{n+m}(A \times B) \leq \mathcal{L}^n(A) \cdot \mathcal{L}^m(B), \quad \forall\ A \subset \mathbb{R}^n,\ B \subset \mathbb{R}^m.$$

Mit anderen Worten : Das Maß $\mathcal{L}^{n+m}$ hat die Eigenschaft $(*)$. $\mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m$ ist aber das größte Maß dieser Art, d.h. $\mathcal{L}^{n+m} \leq \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m$. Mit (1) folgt die Behauptung.

ad (2) : Sei $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{Q}_j$ mit Quadern $Q_i \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{Q}_j \subset \mathbb{R}^m$, wobei

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \varepsilon + \mathcal{L}^n(A)\ ,\ \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^m(\tilde{Q}_j) \leq \varepsilon + \mathcal{L}^m(B) \text{ mit gegebenem } \varepsilon > 0.$$

Es ist $A \times B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_i \times \tilde{Q}_j$, also :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{n+m}(A \times B) \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i)\mathcal{L}^m(\tilde{Q}_j) = \big(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \big) \cdot \big(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^m(\tilde{Q}_j) \big) \\
&\leq \quad \mathcal{L}^n(A) \cdot \mathcal{L}^m(B) + \varepsilon \big[\mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^m(B) \big] + \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Da man O.E. $\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^m(B) < \infty$ annehmen darf, folgt (2) mit $\varepsilon \downarrow 0$.

$\square$

Bemerkung:

Alternativ kann man zeigen, dass $\mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m$ die Voraussetzungen des Eindeutigkeitssatzes für das Maß $\mathcal{L}^{n+m}$ auf $\mathbb{R}^{n+m}$ erfüllt, also $= \mathcal{L}^{n+m}$ sein muss.

Die Volumenberechnung durch Schnitte bzw. die Berechnung von Integralen durch iterierte Mehrfachintegrale geht nun mit folgendem Satz.

Satz 25.11 : (Satz von Fubini)

Seien λ und ρ Maße auf X bzw. Y. Dann gilt :

(i) $\lambda\times\rho$ *ist ein* **reguläres Maß**, *d.h. zu $C \subset X\times Y$ existiert eine* $\boldsymbol{\lambda\times\rho}$**-messbare, maßgleiche** *Obermenge $\tilde{C}$. Dies gilt auch wenn λ, ρ* **selbst nicht** *regulär sind.*

(ii) *$A \subset X$ λ-messbar, $B \subset Y$ ρ-messbar $\Longrightarrow$ $A \times B$ ist $\lambda \times \rho$-messbar mit*

$$(\lambda \times \rho)(A \times B) = \lambda(A)\, \rho(B)$$

(macht den Beweis des vorigen Satzes komplett).

(iii) *Sei $S \subset X \times Y$* $\boldsymbol{\sigma}$**-endlich** *bzgl.* $\boldsymbol{\lambda \times \rho}$, *d.h. es gibt* $\boldsymbol{\lambda \times \rho}$**-messbare** *Mengen S_k mit $(\lambda \times \rho)(S_k) < \infty$ und $S = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_k$. Dann gilt :*

Die **Schnitte**

$$\begin{aligned} S_y &:= \{x \in X : (x,y) \in S\} \subset X, \quad y \in Y, \\ S_x &:= \{y \in Y : (x,y) \in S\} \subset Y, \quad x \in X, \end{aligned}$$

sind λ- bzw. ρ-messbar für ρ-f.a. y bzw. λ-f.a. x.

Die Funktion $y \longmapsto \lambda(S_y)$ ist $\boldsymbol{\rho}$**-integrierbar**,
die Funktion $x \longmapsto \rho(S_x)$ ist $\boldsymbol{\lambda}$**-integrierbar** *mit*

$$\boxed{(\lambda \times \rho)(S) = \int_X \rho(S_x)\, d\lambda(x) = \int_Y \lambda(S_y)\, d\rho(y).}$$

Man erhält also das Volumen von S bzgl. des Produktmaßes $\lambda \times \rho$ durch Aufintegration der Schnittflächen, wobei es keine Rolle spielt, bzgl. welcher Richtung man die Schnitte bildet.

(iv) *Ist $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar bzgl. $\lambda \times \rho$, und ist $\{(x,y) : f(x,y) \neq 0\}$* $\boldsymbol{\sigma}$**-endlich** *bzgl. $\lambda \times \rho$ (z.B. wenn f summierbar), so gilt*

$$\begin{aligned} &y \longmapsto \int_X f(x,y)\, d\lambda(x) \ \text{ ist } \rho\text{-integrierbar}, \\ &x \longmapsto \int_Y f(x,y)\, d\rho(y) \ \text{ ist } \lambda\text{-integrierbar}, \end{aligned}$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned}\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,d(\lambda\times\rho)(x,y) &= \int\limits_X\Big(\int\limits_Y f(x,y)\,d\rho(y)\Big)\,d\lambda(x)\\ &= \int\limits_Y\Big(\int\limits_X f(x,y)\,d\lambda(x)\Big)\,d\rho(y).\end{aligned}}$$

,,schrittweise Integration"

Beweis :

→ Literatur, z.B.: Federer, 2.6.2, p.115f.

□

Bemerkungen und Beispiele :

(1) ,,σ-Endlichkeit" in (iii), (iv) ist nötig, sonst gelten die beiden Formeln nicht :

$$X = Y = \mathbb{R},\ \lambda = \mathcal{L}^1,\ \rho = \text{Zählmaß},\ S = \{(x,x) : 0 \le x \le 1\} \text{ und } f = \chi_S.$$

$\mathcal{L}^1$ und ρ sind Borel-regulär
$\Longrightarrow \mathcal{L}^1 \times \rho$ ist Borel-regulär, d.h. die Borel-Menge S ist $\mathcal{L}^1 \times \rho$-messbar;
gemäß $f = \chi_S \ge 0$ folgt Integrierbarkeit von f bzgl. $\mathcal{L}^1 \times \rho$.
Aber :

$$\begin{aligned} &\int\Big(\int f(x,y)\,d\mathcal{L}^1(x)\Big)\,d\rho(y) &&= \int\Big(\int \chi_S(x,y)\,d\mathcal{L}^1(x)\Big)\,d\rho(y)\\ =\ &\int \mathcal{L}^1\big(\{x : (x,y)\in S\}\big)\,d\rho(y) &&= \int \mathcal{L}^1(\{y\})\,d\rho(y)\\ =\ &0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int\Big(\int f(x,y)\,d\rho(y)\Big)\,d\mathcal{L}^1(x) &&= \int\Big(\int \chi_S(x,y)\,d\rho(y)\Big)\,d\mathcal{L}^1(x)\\ =\ &\int \rho\big(\{y : (x,y)\in S\}\big)\,d\mathcal{L}^1(x) &&= \int\limits_{[0,1]} \rho(\{x\})\,d\mathcal{L}^1(x)\\ =\ &\int\limits_{[0,1]} 1\cdot d\mathcal{L}^1(x) = 1. \end{aligned}$$

Also ist S nicht σ-endlich bzgl. $\mathcal{L}^1 \times \rho$, d.h. wir bekommen insbesondere

$$(\mathcal{L}^1\times\rho)(S) = \infty \quad \text{und auch} \quad \int f(x,y)\,d(\mathcal{L}^1\times\rho) = \infty,$$

denn andernfalls wäre ja $\{(x,y) : f(x,y) \ne 0\}$ σ-endlich.
(warum ? $\big[f > 0\big] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\big[f > \frac{1}{n}\big]$, Maß von $\big[f > \frac{1}{n}\big] \le n \cdot \int f\,d(\mathcal{L}^1 \times \rho) < \infty$)

(2) **Volumen des Katagraphen :**

Setze $K_f := \big\{(x,y) \in A \times \mathbb{R} : 0 \le y \le f(x)\big\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{n+1}(K_f) &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_A \mathcal{L}^1\big(\{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in K_f\}\big)\, d\mathcal{L}^n(x) \\
&= \int_A \mathcal{L}^1\big(\{t \in \mathbb{R} : 0 \le t \le f(x)\}\big)\, d\mathcal{L}^n(x) \\
&= \int_A f(x)\, d\mathcal{L}^n(x).
\end{aligned}$$

Wendet man Fubini auf die Schnitte in t-Richtung an, so folgt :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{n+1}(K_f) &= \int \mathcal{L}^n\big(\{x \in A : (x,t) \in K_f\}\big)\, d\mathcal{L}^1(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^+_\circ} \mathcal{L}^n\big(\{x \in A :\ t \le f(x)\}\big)\, d\mathcal{L}^1(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^+_\circ} \mathcal{L}^n\big(f^{-1}[t,\infty]\big)\, d\mathcal{L}^1(t).
\end{aligned}$$

konkret :

(i) $\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\max\{|x|^3,\,|y|^3,\,|z|^3\}}\, d\mathcal{L}^3(x,y,z) = ?$

Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \exp\big(-\max\{|x|^3,\ |y|^3,\ |z|^3\}\big)$.

f ist stetig $\Longrightarrow$ f $\mathcal{L}^3$-messbar; außerdem: $f \ge 0$.

Deshalb :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, d\,\mathcal{L}^3(x,y,z) = \mathcal{L}^4(K_f) \overset{\text{andere Formel}}{=} \int_0^\infty \mathcal{L}^3\big(f^{-1}([t,\infty))\big)\, d\mathcal{L}^1(t).$$

Für $t > 0$ ist

$$f^{-1}([t,\infty)) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|,\ |y|,\ |z|\} \le \sqrt[3]{\ln 1/t}\big\},$$

wobei wir $t \le 1$ annehmen dürfen, da stets $f \le 1$.

Also ist $f^{-1}([t,\infty))$ ein Würfel mit Kantenlänge $2\sqrt[3]{\ln 1/t}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\max\{|x|^3,\,|y|^3,\,|z|^3\}}\, d\mathcal{L}^3(x,y,z) &= \int_0^1 \big(2\sqrt[3]{\ln 1/t}\big)^3\, dt \\
&= \int_0^1 8\, \ln 1/t\, dt \\
&= -8 \int_0^1 \ln t\, dt \\
&= -8\big[t \cdot \ln t - t\big]_0^1 = 8.
\end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass man die Katagraphenformel auch zur Berechnung von iterierten Integralen benutzen kann. Die Formel aus Satz 25.11(iv) führt wohl nicht(?) so direkt zum gewünschten Ergebnis.

(ii) $\int_{[0,1]^2} (x^2 + xy)\, d\mathcal{L}^2(x,y) = ?$

Alle Voraussetzungen von (iv) des Satzes erfüllt

$$\Longrightarrow \int_{[0,1]^2} (x^2+xy)\, d\mathcal{L}^2(x,y) = \int_0^1 \Big(\int_0^1 (x^2+xy)\, d\mathcal{L}^1(x)\Big)\, d\mathcal{L}^1(y)$$

$$= \int_0^1 \Big(\int_0^1 (x^2+xy)\, dx\Big)\, dy$$

$$= \int_0^1 \big(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} y\big)\, dy$$

$$= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{12},$$

wobei wir die $\mathcal{L}^1$-Integrale standardmäßig ausrechnen dürfen.

iii)

$$\int_{\{(x,y): x^2+y^2 \le 1\}} \big(1 - \sqrt{x^2+y^2}\big)\, d\mathcal{L}^2(x,y)$$

$$\overset{\text{Katagraphenformel}}{=} \mathcal{L}^3\big(\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\, 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}\big)$$

$$\overset{\text{Katagraphenformel}}{=} \int_0^1 \mathcal{L}^2\big(\{(x,y) : 1 - \sqrt{x^2+y^2} \le t\}\big)\, dt$$

$$= \int_0^1 \mathcal{L}^2\big(B_{1-t}(0,0)\big)\, dt$$

$$= \omega_2 \int_0^1 (1-t)^2\, dt \quad \text{mit } \omega_2 := \mathcal{L}^2(B_1(0,0)) =?$$

Zur Berechnung von ω_2 benutzt man die Katagraphenformel

also

$$\omega_2 = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} dt = \pi.$$

Einsetzen ergibt :

$$\int_{\{(x,y): x^2+y^2 \le 1\}} (1 - \sqrt{x^2+y^2})\, d\mathcal{L}^2(x,y) = \pi/3.$$

□

Die Transformationsformel

Diese Formel verallgemeinert die **Substitutionsregel für eindimensionale Integrale** und gestattet manchmal die Reduktion komplizierter Mehrfachintegrale auf einfachere Ausdrücke.

Situation :

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \longrightarrow \Phi(U)$ sei ein **Diffeomorphismus** der Klasse C^1.

Problem :

Welche Beziehung besteht zwischen $\mathcal{L}^n(A)$ und $\mathcal{L}^n(\Phi(A))$ für $A \subset U$?

Allgemeiner :

Umrechnung von $\int\limits_{\Phi(A)} g \, d\mathcal{L}^n$ in ein Integral über A!

Für $g := X_{\Phi(A)}$ hat man den ursprünglichen Fall.

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar, dann ist bekannt :

$$\Phi \text{ **linearer** Isomorphismus} \overset{\text{S.23.9(iv)}}{\Longrightarrow} \mathcal{L}^n(\Phi(A) = |\det \Phi| \, \mathcal{L}^n(A).$$

Sei nun Φ C^1-Diffeomorphismus $U \longrightarrow \Phi(U)$ und $A \subset U$.

Man zerlegt A in kleine Stücke A_i, so dass

$$\begin{cases} \mathcal{L}^n(A) & \approx & \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_i), \\ \mathcal{L}^n(\Phi(A)) & \approx & \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\Phi(A_i)), \\ \Phi(x) & \approx & \underbrace{D\Phi(a_i)(x-a_i) + \Phi(a_i)}_{=:T_i(x)} \text{ auf } A_i, \end{cases}$$

wobei $a_i \in A_i$. Dann ist

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A_i)) \approx \mathcal{L}^n(T_i(A_i)) = \mathcal{L}^n(D\Phi(a_i)(A_i)) \overset{\text{s.o.}}{=} |\det D\Phi(a_i)| \cdot \mathcal{L}^n(A_i)$$

denn T_i und $D\Phi(a_i)$ unterscheiden sich nur um Translationen. Es folgt :

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A) \approx \sum_{i=1}^{\infty} |\det D\Phi(a_i)| \, \mathcal{L}^n(A_i).$$

Da $D\Phi$ stetig ist, gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\det D\Phi(a_i)| \, \mathcal{L}^n(A_i) \longrightarrow \int\limits_A |\det D\Phi| \, d\mathcal{L}^n$$

bei zunehmender Verfeinerung der Zerlegung A_i. Indem man alle Schritte präzise ausführt, folgt

Satz 25.12 : (Transformationsformel für $\mathcal{L}^n$-Integral)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \longrightarrow \Phi(U)$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt :

(i) $A \subset U$ *messbar* $\Longleftrightarrow \Phi(A)$ *messbar*

(ii) $\boxed{A \subset U \text{ messbar} \Longrightarrow \mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \int\limits_A |\det D\Phi|\, d\mathcal{L}^n.}$

(iii) $g : \Phi(U) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *messbar* $\Longleftrightarrow g \circ \Phi : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *messbar*

$\Longleftrightarrow (g \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *messbar.*

(iv) $$\boxed{\begin{array}{l} A \subset U \text{ messbar, } g : \Phi(U) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar} \\ \Longrightarrow \int\limits_{\Phi(A)} g\, d\mathcal{L}^n = \int\limits_A g \circ \Phi |\det D\Phi|\, d\mathcal{L}^n, \end{array}}$$

wobei: keins der Integrale existiert oder beide existieren in $\overline{\mathbb{R}}$ und sind gleich.

Bemerkung zum Beweis : Die Meßbarkeitsaussagen sind trivial.

(iv) folgt aus (ii), indem man $g \geq 0$ annimmt (es existieren beide Integrale in $[0, \infty]$) und dann (vgl. Satz 24.2) schreibt $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{B_k}$, $B_k \subset \Phi(U)$ messbar. Mit

$$\chi_{B_k} \circ \Phi = \chi_{\Phi^{-1}(B_k)} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(\chi_{B_k} \circ \Phi) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{B_k} \right) \circ \Phi$$

folgt :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Phi(A)} g\, d\mathcal{L}^n &= \int\limits_{\Phi(U)} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k}\chi_{B_k} \cdot \chi_{\Phi(A)}\, d\mathcal{L}^n \\
&\overset{\substack{\text{monotone}\\ \text{Konvergenz}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \int\limits_{\Phi(U)} \chi_{B_k} \cdot \chi_{\Phi(A)}\, d\mathcal{L}^n \\
&\overset{B_k \subset \Phi(U)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k}\mathcal{L}^n(B_k \cap \Phi(A)) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \int\limits_{\Phi^{-1}(B_k) \cap A} |\det D\Phi|\, d\mathcal{L}^n \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \int\limits_A \chi_{B_k} \circ \Phi\, |\det D\Phi|\, d\mathcal{L}^n \\
&\overset{\substack{\text{monotone}\\ \text{Konvergenz}}}{=} \int\limits_A \Big(\sum_{k-1}^{\infty} \tfrac{1}{k}\chi_{B_k} \circ \Phi \Big) |\det D\Phi|\, d\mathcal{L}^n \\
&= \int\limits_A g \circ \Phi |\det D\Phi|\, d\mathcal{L}^n
\end{aligned}$$

□

Bemerkung und Beispiele :

(1) Im **Spezialfall $n = 1$** erhält man die **Substitutionsregel** :

Sei $f : I \longrightarrow J$ C^1 mit $f' \neq 0$ überall auf dem offenen Intervall I. J sei das Bild von f. Sei $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig** und $[c, d] \subset J$. Dann gilt nach der Transformationsregel

$$\int_c^d g(y)\,dy = \int\limits_{[c,d]} g\,d\mathcal{L}^1 = \int\limits_{f^{-1}([c,d])} (g \circ f) \cdot |f'|\,d\mathcal{L}^1.$$

Es ist $f^{-1}([c, d]) =: [a, b] \subset I$.

<u>**Fall 1:**</u> $f' > 0$

$$\Longrightarrow \quad f(a) = c,\ f(b) = d$$

$$\Longrightarrow \quad \int\limits_c^d g(y)\,dy = \int\limits_{[a,b]} g \circ f \cdot f'\,d\mathcal{L}^1 = \int\limits_a^b g \circ f \cdot f'\,dx = \int\limits_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} g \circ f \cdot f'\,dx$$

<u>**Fall 2:**</u> $f' < 0$

$$\Longrightarrow \quad f(a) = d,\ f(b) = c$$

$$\Longrightarrow \quad \int\limits_c^d g(y)\,dy = -\int\limits_{[a,b]} g \circ f \cdot f'\,d\mathcal{L}^1 = -\int\limits_a^b g \circ f \cdot f'\,dx = \int\limits_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} g \circ f \cdot f'\,dx$$

(2) **Verallgemeinerungen :**

I. $\boxed{\text{Ist } \Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, injektiv und von der Klasse } C^1, \text{ so gelten alle Aussagen von 25.12.}}$

Hinweis: man benutzt den **Satz von Sard :**

Für eine C^1-Funktion $\Psi : \mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\mathcal{L}^n\big(\{\Psi(x) : \det D\Psi(x) = 0\}\big) = 0.$$

II. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lediglich C^1.

(i) Für $\boldsymbol{A \subset U}$**messbar** ist auch $\boldsymbol{\Phi(A)}$**messbar**.

Die **Vielfachheitenfunktion**

$$\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto \#\{x \in A : \Phi(x) = y\} =: V(\Phi|_A, y)$$

ist ebenfalls messbar, und es gilt :

$$\boxed{\int V\big(\Phi|_A, \cdot\big)\,d\mathcal{L}^n = \int\limits_A |\det D\Phi|\,d\mathcal{L}^n.}$$

(ii) Ist $A \subset U$ messbar, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so ist $g \circ \Phi \,|\det D\Phi|$ messbar, und es gilt

$$\boxed{\int g \cdot V\big(\Phi|_A, \cdot\big)\, d\mathcal{L}^n = \int_A g \circ \Phi\,|\det D\Phi|\, d\mathcal{L}^n.}$$

Hier existieren entweder beide Integrale und sind gleich oder keines existiert.

Offenbar folgt I. aus II., da dann $V\big(\Phi|_A, \cdot\big) = \chi_{\Phi(A)}$.

(3) Sei $f : [0, \infty) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}^1$-integrierbar. Dann gilt :

$$\begin{aligned} &\int_{R_1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le R_2} f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\, d\mathcal{L}^2(x,y) \\ = \;& 2\pi \int_{[R_1,R_2]} f(t) \cdot t\, d\mathcal{L}^1(t) \\ = \;& 2\pi \int_{R_1}^{R_2} f(t) \cdot t \cdot dt, \quad 0 \le R_1 < R_2 < \infty \end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen korrekt ist, wenn $\boldsymbol{f}$ **auf jedem Intervall** $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}]$**eine Regelfunktion ist**.

Beweis :

$\Phi(r, \varphi) = (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$ Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \int_{\{(x,y): R_1 \le |(x,y)| \le R_2\}} f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\, d\mathcal{L}^2(x,y) \\ = \;& \int_{\Phi([R_1,R_2]\times[0,2\pi])} \ldots \\ = \;& \int_{[R_1,R_2]\times[0,2\pi]} f\big(\Phi(r,\varphi)\big)\; |\det D\Phi|\, d\mathcal{L}^2(r,\varphi) \\ = \;& \int_{[R_1,R_2]\times[0,2\pi]} f(r) \cdot r\, d\mathcal{L}^2(r,\varphi) \\ \overset{\text{Fubini}}{=} \;& 2\pi \int_{[R_1,R_2]} f(r) \cdot r\, d\mathcal{L}^1(r). \end{aligned}$$

Damit läßt sich zeigen :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}}$$

denn :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d\,\mathcal{L}^2(x,y) \;&\overset{\text{Fubini}}{=}\; \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, d\mathcal{L}^1(x)\Big)\, d\mathcal{L}^1(y) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, d\mathcal{L}^1(x)\Big)\, d\mathcal{L}^1(y) \;&=\; \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, d\mathcal{L}^1(t)\Big)^2 \\ \overset{\text{Begründung}}{=} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt\Big)^2. & \end{aligned}$$

Andererseits

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d\mathcal{L}^2(x,y) \overset{\text{Formel v. vorhin}}{=} 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2}\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \left(-\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dr}\, e^{-r^2}\right) dr = \pi$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt\Big)^2 = \pi$$

$\square$

Weitere Anwendungen der Transformationsformel für $\mathcal{L}^n$

(4) Räumliche Polarkoordinaten

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) := (r\cos\vartheta\cos\varphi, r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta) \text{ auf } (0,\infty)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi).$$

Φ ist ein Diffeomorphismus mit Bild $\Phi = \mathbb{R}^3 - \underbrace{(-\infty,0]\times\{0\}\times\mathbb{R}}_{\mathcal{L}^3\text{-Nullmenge!}}$, $|\det D\Phi| = \mathbb{R}^2\cdot\cos\vartheta$.

Beispiel :

Volumen der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius R

$$\mathcal{L}^3(B_R) = \int_{(0,R)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi)} r^2\cos\vartheta\, d\mathcal{L}^3(r,\vartheta,\varphi)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} 2\pi\left(\int_0^R r^2\, dr\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos\vartheta\right) = \tfrac{4}{3}\pi\mathbb{R}^3.$$

Wie in (3) kann man sich überlegen

$$\int_{R_1\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le\mathbb{R}_2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) d\mathcal{L}^3(x,y,z) = 4\pi\int_{R_1}^{R_2} r^2 f(r)\, dr,$$

und im $\mathbb{R}^n$ gilt :

$$\int_{R_1\le|x|\le R_2} f(|x|)\, d\mathcal{L}^n(x) = n\cdot\omega_n\int_{R_1}^{R_2} r^{n-1} f(r)\, dr$$

für $\mathcal{L}^1$-integrierbare $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ (genauer: f **Regelfunktion** auf jedem Intervall $[R_1,R_2]$). Für die letzte Formel muß man Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^n$ einführen.

Ergänzungen

Bis jetzt können wir nur das Volumen $\mathcal{L}^n(K)$ von „Körpern" $K \subset \mathbb{R}^n$ vernünftig messen, niederdimensionale Mengen werden nicht berücksichtigt, denn Untermannigfaltigkeiten der Dimension $< n$ sind automatisch $\mathcal{L}^n$-Nullmengen. Wir benötigen deshalb niederdimensionale geometrische Maße.

Definition 25.5 : Hausdorff-Maße

Sei $0 \leq s < \infty$, $\alpha(s) := \begin{cases} \omega_s & , \quad s \in \mathbb{N} \\ \textit{beliebig} > 0 & , \quad \textit{sonst} \end{cases}$

a) Für $0 < \delta \leq \infty$ *sei* $(A \subset \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\mathit{diam}\, A_i}{2} \right)^s : \begin{array}{c} (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \textit{ beliebige Überdeckung von } A \\ \textit{mit Mengen } A_i \textit{ wobei } \mathit{diam}\, A_i \leq \delta \end{array} \right\}$$

b) Für $A \subset \mathbb{R}^n$ *sei (s-dim. Hausdorff-Maß)*

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Eigenschaften :

(1) $\mathcal{H}^s_\delta$, $\mathcal{H}^s$ sind Maße auf $\mathbb{R}^n$

(2) $\delta \longmapsto \mathcal{H}^s_\delta(A)$ ist monoton fallend $\Longrightarrow$ $\mathcal{H}^s(A) = \lim\limits_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$ existiert

(3) A beschränkt $\Longrightarrow$ $\mathcal{H}^s_\delta(A) < \infty$ für alle $\delta > 0$
(aber $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ kann i.a. nicht unabhängig von δ beschränkt werden)

(4) $\operatorname{dist}(A, B) > 2\delta$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) = \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$

$\Rightarrow$(5) $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$
D.h.: **$\mathcal{H}^s$ ist Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$.**

(6) $\boxed{\mathcal{L}^n = \mathcal{H}^n = \mathcal{H}^n_\delta \text{ auf } \mathbb{R}^n \text{ für jedes } \delta > 0}$

(7) $\mathcal{H}^s$ ist **homogen vom Grad s** und invariant unter Isometrien von $\mathbb{R}^n$.

(8) $\mathcal{H}^\circ$ ist das Zählmaß.

(9) Für $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mathcal{H}^s(A) < \infty \Longrightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0 \text{ für alle } t > s$$
$$\mathcal{H}^s(A) > 0 \Longrightarrow \mathcal{H}^t(A) = \infty \text{ für alle } t < s.$$

(10) $A \subset \ell$-dim. Hyperebene, A beschränkt $\Longrightarrow$ $\mathcal{H}^\ell(A) < \infty$

(11) U offen $\subset \mathbb{R}^m$, $m < n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regulär $\Longrightarrow$ $\mathcal{H}^m(f(K)) < \infty \; \forall K$ kompakt $\subset U$

Bemerkung :

(9) - (11) zeigen, dass $\mathcal{H}^\ell$ das richtige Maß zur Messung $\ell-\dim$ Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist.

Lemma :

Sei $L:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ linear mit $\boldsymbol{n \leq N}$. Sei

$$[\![L]\!] := \det(L^T \circ L)^{1/2} \quad \text{(genannt die \textbf{Jacobische von} } \boldsymbol{L}\text{)}$$

Dann gilt für $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = [\![L]\!] \cdot \mathcal{L}^n(A)$$

Bemerkung :

(1) „Lineare Algebra": $[\![L]\!] = \sqrt{\substack{\text{Summe der Quadrate aller}\\ n\times n \text{ Unterdet. von } L}}$!

(2) Es ist $L^t \circ L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\langle L^t \circ Lv, v\rangle = \langle Lv, Lv\rangle \geq 0$$

$\Longrightarrow$ $\det(L^t \circ L) \geq 0$, so dass $[\![L]\!]$ definiert ist.

Mit dem Lemma und Approximation beweist man

Satz 25.13 : Flächenformel

Seien $\boldsymbol{n < N}$ *und* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen sowie* $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ C^1. *Dann gilt für alle* $\mathcal{L}^n$*-messbaren* $A \subset U$

$$\int\limits_A [\![D\Phi]\!]\, d\mathcal{L}^n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} V(\Phi|_A, \cdot)\, d\mathcal{H}^n(y).$$

Ist Φ **injektiv***, so folgt :*

a) $\boxed{\mathcal{H}^n\big(\Phi(A)\big) = \int\limits_A [\![D\Phi]\!]\, d\mathcal{L}^n}$

b) **(Berechnung von Flächenintegralen)**

$$\int\limits_{\Phi(A)} g\, d\mathcal{H}^n = \int\limits_A g\circ\Phi\, [\![D\Phi]\!]\, d\mathcal{L}^n$$

für $\mathcal{H}^n$*-messbare* $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *(z.B. Borel* g*), wobei entweder keins der Integrale existiert oder aber beide Integrale existieren und gleich sind.*

Beispiele :

(1) **Kurven von $\mathbb{R}^\ell$:**
$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ injektive C^1-Kurve;

$$[\![\gamma'(t)]\!] = |\gamma'(t)| \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}^1\big(\gamma([a,b)\big) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \quad \text{(Kurvenlänge)}$$

(2) **Graphen in $\mathbb{R}^{n+1}$:**
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $M := \{(x, f(x)) : x \in \Omega\}$ ist n-dim. Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$; mit $F(x) := (x, f(x))$ ist

$$[\![DF(x)]\!] = \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} \qquad \begin{pmatrix} \text{folgt leicht aus der anderen Darstellung} \\ \text{von } [\![DF(x)]\!] \text{ für } n = 2,\,3 \text{ direkt prüfbar} \end{pmatrix}.$$

Also :

$$\mathcal{H}^n(M) = \int\limits_\Omega \sqrt{1 + \nabla f|^2}\,d\mathcal{L}^n(x).$$

Zum Schluß eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes, der

Satz 25.14 : (Satz von Gauß)

$G \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt, ∂G sei eine $(n-1)$-dim. Mannigfaltigkeit, $\mathcal{N}(x) \in (T_x \partial G)^\perp$ sei der äußere Normalenvektor ($|\mathcal{N}| = 1$).
Ist $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ für $U \supset \overline{G}$ offen, so gilt

$$\boxed{\int\limits_G \operatorname{div} F\,d\mathcal{L}^n = \int\limits_{\partial G} \langle F, \mathcal{N}\rangle\,d\mathcal{H}^{n-1}}$$

und der

Satz 25.15 : Satz von Stokes

Seien eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand ∂M und ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben.
($\mathcal{N}$=Normalfeld zu M, T=„richtig orientierter" Tangentenvektor an die Kurve ∂M)

$$\boxed{\int\limits_M rotF \cdot \mathcal{N}\,d\mathcal{H}^2 = \int\limits_{\partial M} F \cdot T\,d\mathcal{H}^1}$$