Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 3 (WS 2017/18)
13. Übungsblatt (Probeklausur)

Aufgabe 1

Bestimmen Sie Minimum und Maximum der Funktion $f(x, y, z) = x + 2y - z$ auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 8$ mit der Ebene $x + z = 4$.

Aufgabe 2

a) Es sei M eine k-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass dann $M' := \phi(M)$ ebenfalls eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Menge $E := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 = x^3 + x + 2\big\}$ eine 1-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist und bestimmen Sie den Tangentialraum T_pE im Punkt $p = (-1, 0)$.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y\in A} |x - y|, \quad A \subset \mathbb{R}^n,$$

kein (äußeres) Maß auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

b) Zeigen Sie, dass durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } A \text{ höchstens abzählbar unendlich ist,} \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad (A \subset \mathbb{R})$$

ein (äußeres) Maß auf $\mathbb{R}$ definiert wird. Ist μ ein Radon-Maß?

Bitte wenden!

Aufgabe 4

a) Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Ferner Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von Y. Zeigen Sie, dass dann

$$f^{-1}(\mathcal{A}) := \left\{ f^{-1}(A) \,:\, A \in \mathcal{A} \right\}$$

eine σ-Algebra auf X ist.

b) Es sei X eine Menge und λ ein Maß auf X, bezüglich dem nur die Mengen X und $\emptyset$ messbar sind. Zeigen Sie, dass die λ-messbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ genau die konstanten Funktionen sind.

Aufgabe 5

a) Es sei X eine Menge und μ ein Maß auf X mit $\mu(X) < \infty$. Die Folge $f_n : X \to \mathbb{R}$ *μ-summierbarer* Funktionen konvergiere *gleichmäßig* gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch f μ-summierbar ist mit

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie den Satz über die majorisierte Konvergenz!)

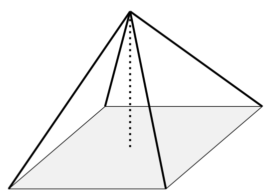
b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin(x)} \,\mathrm{d}\mathcal{L}^1.$$

Begründen Sie ihre Rechnung.

Aufgabe 6

a) Es sei $[0, 1] \times [0, 1]$ die Grundfläche einer (geraden) Pyramide der Höhe 1 in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini das Lebesgue-Maß der Pyramide.



b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y) := \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ auf $R := [1, 2] \times [1, 2]$ $\mathcal{L}^2$-integrierbar ist und bestimmen Sie

$$\int_R f(x, y) \,\mathrm{d}\mathcal{L}^2.$$