Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya

Differentialgeometrie II (Flächentheorie) WS 2013/2014
Blatt 4

Aufgabe 4.1 (4+4+3+4=15 Punkte)

Betrachten Sie für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und für eine Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ die Abbildung $X : I \times (\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(u)) \,.$$

i) Handelt sich um eine reguläre Fläche? Fertigen Sie eine Skizze im Fall $I = \mathbb{R}$ und $h : u \mapsto u^3$ an.

ii) Im Folgenden sei $h(u) = u$ auf $(1/2, 2)$ und $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ ($\varepsilon > 0$ hinreichend klein) eine Funktion mit $g(0) = 0$ und

$$g'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + g^2(s)/2}} \quad \text{für alle} \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Die Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\alpha(s) = \left(1 - \frac{1}{4}g^2(s), g(s), 1 + \frac{1}{4}g^2(s)\right).$$

(a) Berechnen Sie die Krümmung $\varkappa(0)$ und die Normale $n(0)$ an die Kurve α in $s = 0$.

(b) Ist α eine Kurve auf der Fläche X?

(c) In $u_0 = 1$ und $v_0 = 0$ sei N_0 "die" Normale an die Fläche X. Zeigen Sie, dass die Kurve α in der Ebene

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda N_0 + \mu\alpha'(0), \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

verläuft. Berechnen Sie die Normalkrümmung von α in $s = 0$.

(Bitte wenden)

Aufgabe 4.2 (4+6=10 Punkte)

Betrachten Sie für $-\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}$ und für $0 < u < 2\pi$ die parametrisierte Fläche

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \cos\frac{u}{2}\cos u \\ \cos\frac{u}{2}\sin u \\ \sin\frac{u}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie die Gauß-Abbildung $N(u,v)$ und die Erste Fundamentalform der Fläche.

2. Berechnen Sie

   $$\lim_{u\to 0} N(u,0) \quad \text{und} \quad \lim_{u\to 2\pi} N(u,0).$$

   Interpretieren Sie das Ergebnis.

Abgabe: Mittwoch 20.11.13, vor der Vorlesung in dem Briefkasten in Gebäude E2 5